Codis correctors d'errors: una aplicació dels cossos finits d'anada i tornada

Xevi Guitart

Cossos finits

- p un primer, $q := p^r$ i $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ polinomi irreductible de grau r.
- $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p[x]/(f)$ és un cos de q elements.

Exemple: $\mathbb{F}_{16}$

- $\mathbb{F}_{16} = \mathbb{F}_2[x]/(x^4 + x + 1)$, posem $\alpha = \bar{x} \rightsquigarrow \alpha^4 + \alpha + 1 = 0$.
- $\mathbb{F}_{16} = \{0, 1, \alpha, \alpha+1, \alpha^2, \alpha^2+1, \alpha^2+\alpha, \alpha^2+\alpha+1, \alpha^3, \alpha^3+1, \alpha^3+\alpha, \alpha^3\alpha+1, \alpha^3+\alpha^2, \alpha^3+\alpha^2+1, \alpha^3+\alpha^2+\alpha, \alpha^3+\alpha^2+\alpha+1\}$
- $(\alpha^2+\alpha)(\alpha^3+\alpha+1) = \alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha = \alpha^3+\alpha^2+\alpha+1$

- Introduïts al segle XIX (Gauss, Galois, Jordan,...) com a objectes d'interès purament matemàtic...
- ...i van trobar aplicacions inesperades al segle XX!

Cossos finits

- p un primer, $q := p^r$ i $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ polinomi irreductible de grau r.
- $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p[x]/(f)$ és un cos de q elements.

Exemple: $\mathbb{F}_{16}$

- $\mathbb{F}_{16} = \mathbb{F}_2[x]/(x^4 + x + 1)$, posem $\alpha = \bar{x} \rightsquigarrow \alpha^4 + \alpha + 1 = 0$.
- $\mathbb{F}_{16} = \{0, 1, \alpha, \alpha+1, \alpha^2, \alpha^2+1, \alpha^2+\alpha, \alpha^2+\alpha+1, \alpha^3, \alpha^3+1, \alpha^3+\alpha, \alpha^3\alpha+1, \alpha^3+\alpha^2, \alpha^3+\alpha^2+1, \alpha^3+\alpha^2+\alpha, \alpha^3+\alpha^2+\alpha+1\}$
- $(\alpha^2+\alpha)(\alpha^3+\alpha+1) = \alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha = \alpha^3+\alpha^2+\alpha+1$

- Introduïts al segle XIX (Gauss, Galois, Jordan,...) com a objectes d'interès purament matemàtic...
- ...i van trobar aplicacions inesperades al segle XX!

Cossos finits

- p un primer, $q := p^r$ i $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ polinomi irreductible de grau r.
- $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p[x]/(f)$ és un cos de q elements.

Exemple: $\mathbb{F}_{16}$

- $\mathbb{F}_{16} = \mathbb{F}_2[x]/(x^4 + x + 1)$, posem $\alpha = \bar{x} \rightsquigarrow \alpha^4 + \alpha + 1 = 0$.
- $\mathbb{F}_{16} = \{0, 1, \alpha, \alpha+1, \alpha^2, \alpha^2+1, \alpha^2+\alpha, \alpha^2+\alpha+1, \alpha^3, \alpha^3+1, \alpha^3+\alpha, \alpha^3\alpha+1, \alpha^3+\alpha^2, \alpha^3+\alpha^2+1, \alpha^3+\alpha^2+\alpha, \alpha^3+\alpha^2+\alpha+1\}$
- $(\alpha^2+\alpha)(\alpha^3+\alpha+1) = \alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha = \alpha^3+\alpha^2+\alpha+1$

- Introduïts al segle XIX (Gauss, Galois, Jordan,...) com a objectes d'interès purament matemàtic...
- ...i van trobar aplicacions inesperades al segle XX!

Cossos finits

- p un primer, $q := p^r$ i $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ polinomi irreductible de grau r.
- $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p[x]/(f)$ és un cos de q elements.

Exemple: $\mathbb{F}_{16}$

- $\mathbb{F}_{16} = \mathbb{F}_2[x]/(x^4 + x + 1)$, posem $\alpha = \bar{x} \rightsquigarrow \alpha^4 + \alpha + 1 = 0$.
- $\mathbb{F}_{16} = \{0, 1, \alpha, \alpha + 1, \alpha^2, \alpha^2 + 1, \alpha^2 + \alpha, \alpha^2 + \alpha + 1, \alpha^3, \alpha^3 + 1, \alpha^3 + \alpha, \alpha^3\alpha + 1, \alpha^3 + \alpha^2, \alpha^3 + \alpha^2 + 1, \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha, \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1\}$
- $(\alpha^2 + \alpha)(\alpha^3 + \alpha + 1) = \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha = \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$

- Introduïts al segle XIX (Gauss, Galois, Jordan,...) com a objectes d'interès purament matemàtic...
- ...i van trobar aplicacions inesperades al segle XX!

Cossos finits

- p un primer, $q := p^r$ i $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ polinomi irreductible de grau r.
- $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p[x]/(f)$ és un cos de q elements.

Exemple: $\mathbb{F}_{16}$

- $\mathbb{F}_{16} = \mathbb{F}_2[x]/(x^4 + x + 1)$, posem $\alpha = \bar{x} \rightsquigarrow \alpha^4 + \alpha + 1 = 0$.
- $\mathbb{F}_{16} = \{0, 1, \alpha, \alpha + 1, \alpha^2, \alpha^2 + 1, \alpha^2 + \alpha, \alpha^2 + \alpha + 1, \alpha^3, \alpha^3 + 1, \alpha^3 + \alpha, \alpha^3\alpha + 1, \alpha^3 + \alpha^2, \alpha^3 + \alpha^2 + 1, \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha, \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1\}$
- $(\alpha^2 + \alpha)(\alpha^3 + \alpha + 1) = \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha = \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$

- Introduïts al segle XIX (Gauss, Galois, Jordan,...) com a objectes d'interès purament matemàtic...
- ...i van trobar aplicacions inesperades al segle XX!

Cossos finits

- p un primer, $q := p^r$ i $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ polinomi irreductible de grau r.
- $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p[x]/(f)$ és un cos de q elements.

Exemple: $\mathbb{F}_{16}$

- $\mathbb{F}_{16} = \mathbb{F}_2[x]/(x^4 + x + 1)$, posem $\alpha = \bar{x} \rightsquigarrow \alpha^4 + \alpha + 1 = 0$.
- $\mathbb{F}_{16} = \{0, 1, \alpha, \alpha + 1, \alpha^2, \alpha^2 + 1, \alpha^2 + \alpha, \alpha^2 + \alpha + 1, \alpha^3, \alpha^3 + 1, \alpha^3 + \alpha, \alpha^3\alpha + 1, \alpha^3 + \alpha^2, \alpha^3 + \alpha^2 + 1, \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha, \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1\}$
- $(\alpha^2 + \alpha)(\alpha^3 + \alpha + 1) = \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha = \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$

- Introduïts al segle XIX (Gauss, Galois, Jordan,...) com a objectes d'interès purament matemàtic...
- ...i van trobar aplicacions inesperades al segle XX!

Cossos finits

- p un primer, $q := p^r$ i $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ polinomi irreductible de grau r.
- $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p[x]/(f)$ és un cos de q elements.

Exemple: $\mathbb{F}_{16}$

- $\mathbb{F}_{16} = \mathbb{F}_2[x]/(x^4 + x + 1)$, posem $\alpha = \bar{x} \rightsquigarrow \alpha^4 + \alpha + 1 = 0$.
- $\mathbb{F}_{16} = \{0, 1, \alpha, \alpha + 1, \alpha^2, \alpha^2 + 1, \alpha^2 + \alpha, \alpha^2 + \alpha + 1, \alpha^3, \alpha^3 + 1, \alpha^3 + \alpha, \alpha^3\alpha + 1, \alpha^3 + \alpha^2, \alpha^3 + \alpha^2 + 1, \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha, \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1\}$
- $(\alpha^2 + \alpha)(\alpha^3 + \alpha + 1) = \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha = \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$

- Introduïts al segle XIX (Gauss, Galois, Jordan,...) com a objectes d'interès purament matemàtic...
- ...i van trobar aplicacions inesperades al segle XX!

Cossos finits

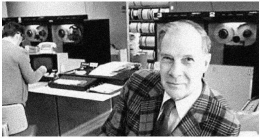
- p un primer, $q := p^r$ i $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ polinomi irreductible de grau r.
- $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p[x]/(f)$ és un cos de q elements.

Exemple: $\mathbb{F}_{16}$

- $\mathbb{F}_{16} = \mathbb{F}_2[x]/(x^4 + x + 1)$, posem $\alpha = \bar{x} \rightsquigarrow \alpha^4 + \alpha + 1 = 0$.
- $\mathbb{F}_{16} = \{0, 1, \alpha, \alpha + 1, \alpha^2, \alpha^2 + 1, \alpha^2 + \alpha, \alpha^2 + \alpha + 1, \alpha^3, \alpha^3 + 1, \alpha^3 + \alpha, \alpha^3\alpha + 1, \alpha^3 + \alpha^2, \alpha^3 + \alpha^2 + 1, \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha, \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1\}$
- $(\alpha^2 + \alpha)(\alpha^3 + \alpha + 1) = \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha = \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$

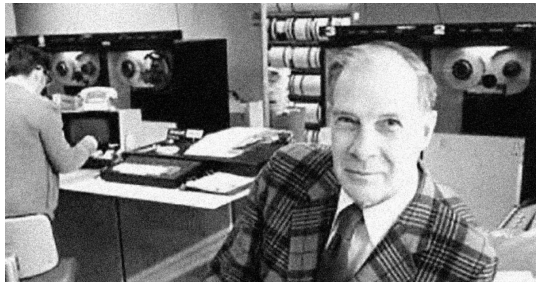
- Introduïts al segle XIX (Gauss, Galois, Jordan,...) com a objectes d'interès purament matemàtic...
- ...i van trobar aplicacions inesperades al segle XX!

Richard Hamming (EUA, 1915-1998)



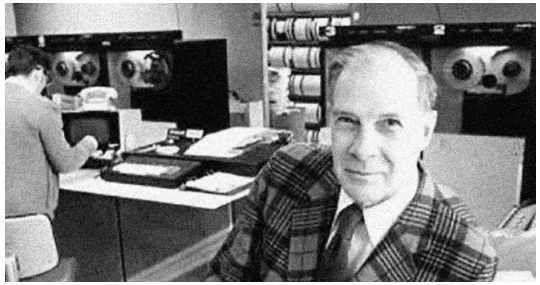
- Treballà al projecte Manhattan programant calculadores mecàniques
- Al 1946 passà als Bell Labs, per treballar en el Model V:
- Es pot detectar un error en un bit afegint un “bit de paritat”:
  - 0110 es codifica com 01100, mentre que 0100 com 01001
  - Si hi ha error en un bit i es llegeix 11100 ⇒ hi ha hagut un error
- Hamming trobà una manera de codificar que pot corregir l’error

Richard Hamming (EUA, 1915-1998)



- Treballà al projecte Manhattan programant calculadores mecàniques
- Al 1946 passà als Bell Labs, per treballar en el Model V:
- Es pot detectar un error en un bit afegint un "bit de paritat":
  - 0110 es codifica com 01101, mentre que 0100 com 01000
  - Si hi ha error en un bit es llegeix 11101 o bé 01001, però no un error
- Hamming trobà una manera de codificar que pot corregir l'error

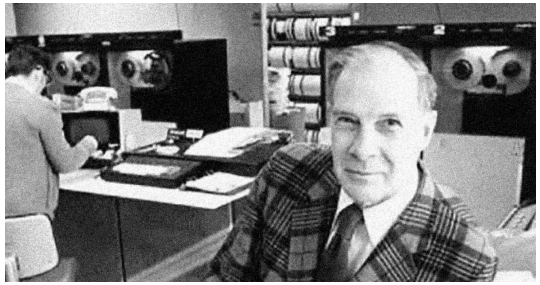
Richard Hamming (EUA, 1915-1998)



- Treballà al projecte Manhattan programant calculadores mecàniques
- Al 1946 passà als Bell Labs, per treballar en el Model V:

  - El codi s'entrava amb targetes perforades indicant un codi binari
  - Un error en un bit (que era freqüent) parava el programa
- Es pot detectar un error en un bit afegint un "bit de paritat":
  - 0110 es codifica com 01100, mentre que 0100 com 01001
  - Si hi ha error en un bit i es llegeix 11100 $\rightsquigarrow$ hi ha hagut un error
- Hamming trobà una manera de codificar que pot corregir l'error

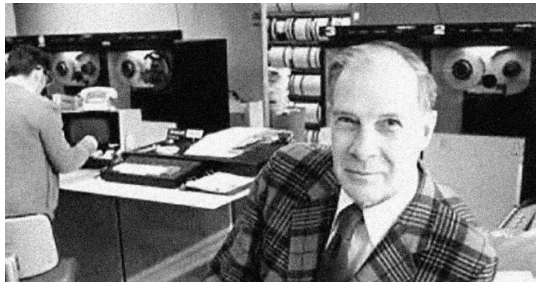
Richard Hamming (EUA, 1915-1998)



- Treballà al projecte Manhattan programant calculadores mecàniques
- Al 1946 passà als Bell Labs, per treballar en el Model V:

  - El codi s'entrava amb targetes perforades indicant un codi binari
  - Un error en un bit (que era freqüent) parava el programa
- Es pot detectar un error en un bit afegint un "bit de paritat":
  - 0110 es codifica com 01100, mentre que 0100 com 01001
  - Si hi ha error en un bit i es llegeix 11100 $\rightsquigarrow$ hi ha hagut un error
- Hamming trobà una manera de codificar que pot corregir l'error

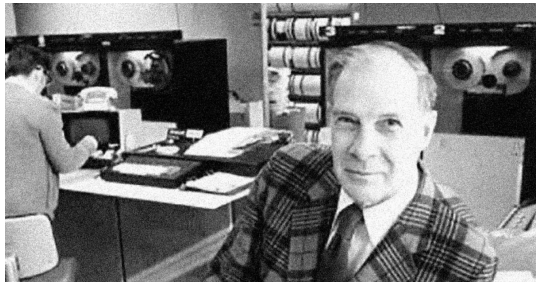
Richard Hamming (EUA, 1915-1998)



- Treballà al projecte Manhattan programant calculadores mecàniques
- Al 1946 passà als Bell Labs, per treballar en el Model V:

  - El codi s'entrava amb targetes perforades indicant un codi binari
  - Un error en un bit (que era freqüent) parava el programa
- Es pot detectar un error en un bit afegint un "bit de paritat":
  - 0110 es codifica com 01100, mentre que 0100 com 01001
  - Si hi ha error en un bit i es llegeix 11100 $\rightsquigarrow$ hi ha hagut un error
- Hamming trobà una manera de codificar que pot corregir l'error

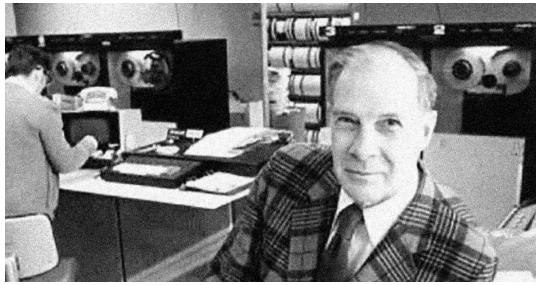
Richard Hamming (EUA, 1915-1998)



- Treballà al projecte Manhattan programant calculadores mecàniques
- Al 1946 passà als Bell Labs, per treballar en el Model V:

  - El codi s'entrava amb targetes perforades indicant un codi binari
  - Un error en un bit (que era freqüent) parava el programa
- Es pot detectar un error en un bit afegint un "bit de paritat":
  - 0110 es codifica com 01100, mentre que 0100 com 01001
  - Si hi ha error en un bit i es llegeix 11100 $\rightsquigarrow$ hi ha hagut un error
- Hamming trobà una manera de codificar que pot corregir l'error

Richard Hamming (EUA, 1915-1998)



- Treballà al projecte Manhattan programant calculadores mecàniques
- Al 1946 passà als Bell Labs, per treballar en el Model V:

  - El codi s'entrava amb targetes perforades indicant un codi binari
  - Un error en un bit (que era freqüent) parava el programa
- Es pot detectar un error en un bit afegint un "bit de paritat":
  - 0110 es codifica com 01100, mentre que 0100 com 01001
  - Si hi ha error en un bit i es llegeix 11100 $\rightsquigarrow$ hi ha hagut un error
- Hamming trobà una manera de codificar que pot corregir l'error

El codi de Hamming (7,4,3)

- Les 16 paraules binàries de longitud 4 es codifiquen amb 7 bits
  0000000, 0001011, 0010101, 0011110, 0100110, 0101101
  0110011, 0111000, 1000111, 1001100, 1010010, 1011001
  1100001, 1101010, 1110100, 1111111
- Propietat: dues paraules codi difereixen com a mínim en tres bits
- 0000 es codifica com 0000000
- 0001 es codifica com 0001011, etc.
- Si es produeix un error, per exemple 0001111
- Resulta que hi ha una única paraula del codi a distància 1 d'aquesta: 0001011, totes les altres estan a distància ≥ 2.
- Aquest és el naixement de la teoria de codis correctors d'errors
  - S'aplica a totes les formes de comunicació digital: transmissió digital de senyal, DVD, Disc durs,...
- Missatges: paraules de $\mathbb{F}_2^4$, Paraules codi: $\mathbb{F}_2^7$
  - En general: missatges $\mathbb{F}_q^k$, codi: $\mathbb{F}_q^n$

El codi de Hamming (7,4,3)

- Les 16 paraules binàries de longitud 4 es codifiquen amb 7 bits
  0000000, 0001011, 0010101, 0011110, 0100110, 0101101
  0110011, 0111000, 1000111, 1001100, 1010010, 1011001
  1100001, 1101010, 1110100, 1111111
- Propietat: dues paraules codi difereixen com a mínim en tres bits
- 0000 es codifica com 0000000
- 0001 es codifica com 0001011, etc.
- Si es produeix un error, per exemple 0001111
- Resulta que hi ha una única paraula del codi a distància 1 d'aquesta: 0001011, totes les altres estan a distància ≥ 2.
- Aquest és el naixement de la teoria de codis correctors d'errors
  - S'aplica a totes les formes de comunicació digital: transmissió digital de senyal, DVD, Disc durs,...
- Missatges: paraules de $\mathbb{F}_2^4$, Paraules codi: $\mathbb{F}_2^7$
  - En general: missatges $\mathbb{F}_q^k$, codi: $\mathbb{F}_q^n$

El codi de Hamming (7,4,3)

- Les 16 paraules binàries de longitud 4 es codifiquen amb 7 bits
  0000000, 0001011, 0010101, 0011110, 0100110, 0101101
  0110011, 0111000, 1000111, 1001100, 1010010, 1011001
  1100001, 1101010, 1110100, 1111111
- Propietat: dues paraules codi difereixen com a mínim en tres bits
- 0000 es codifica com 0000000
- 0001 es codifica com 0001011, etc.
- Si es produeix un error, per exemple 0001111
- Resulta que hi ha una única paraula del codi a distància 1 d'aquesta: 0001011, totes les altres estan a distància ≥ 2.
- Aquest és el naixement de la teoria de codis correctors d'errors
  - S'aplica a totes les formes de comunicació digital: transmissió digital de senyal, DVD, Disc durs,...
- Missatges: paraules de $\mathbb{F}_2^4$, Paraules codi: $\mathbb{F}_2^7$
  - En general: missatges $\mathbb{F}_q^k$, codi: $\mathbb{F}_q^n$

El codi de Hamming (7,4,3)

- Les 16 paraules binàries de longitud 4 es codifiquen amb 7 bits
  0000000, 0001011, 0010101, 0011110, 0100110, 0101101
  0110011, 0111000, 1000111, 1001100, 1010010, 1011001
  1100001, 1101010, 1110100, 1111111
- Propietat: dues paraules codi difereixen com a mínim en tres bits
- 0000 es codifica com 0000000
- 0001 es codifica com 0001011, etc.
- Si es produeix un error, per exemple 0001111
- Resulta que hi ha una única paraula del codi a distància 1 d'aquesta: 0001011, totes les altres estan a distància ≥ 2.
- Aquest és el naixement de la teoria de codis correctors d'errors
  - S'aplica a totes les formes de comunicació digital: transmissió digital de senyal, DVD, Disc durs,...
- Missatges: paraules de $\mathbb{F}_2^4$, Paraules codi: $\mathbb{F}_2^7$
  - En general: missatges $\mathbb{F}_q^k$, codi: $\mathbb{F}_q^n$

El codi de Hamming (7,4,3)

- Les 16 paraules binàries de longitud 4 es codifiquen amb 7 bits
  0000000, 0001011, 0010101, 0011110, 0100110, 0101101
  0110011, 0111000, 1000111, 1001100, 1010010, 1011001
  1100001, 1101010, 1110100, 1111111
- Propietat: dues paraules codi difereixen com a mínim en tres bits
- 0000 es codifica com 0000000
- 0001 es codifica com 0001011, etc.
- Si es produeix un error, per exemple 0001111
- Resulta que hi ha una única paraula del codi a distància 1 d'aquesta: 0001011, totes les altres estan a distància ≥ 2.
- Aquest és el naixement de la teoria de codis correctors d'errors
  - S'aplica a totes les formes de comunicació digital: transmissió digital de senyal, DVD, Disc durs,...
- Missatges: paraules de $\mathbb{F}_2^4$, Paraules codi: $\mathbb{F}_2^7$
  - En general: missatges $\mathbb{F}_q^k$, codi: $\mathbb{F}_q^n$

El codi de Hamming (7,4,3)

- Les 16 paraules binàries de longitud 4 es codifiquen amb 7 bits
  0000000, 0001011, 0010101, 0011110, 0100110, 0101101
  0110011, 0111000, 1000111, 1001100, 1010010, 1011001
  1100001, 1101010, 1110100, 1111111
- Propietat: dues paraules codi difereixen com a mínim en tres bits
- 0000 es codifica com 0000000
- 0001 es codifica com 0001011, etc.
- Si es produeix un error, per exemple 0001111
- Resulta que hi ha una única paraula del codi a distància 1 d'aquesta: 0001011, totes les altres estan a distància ≥ 2.
- Aquest és el naixement de la teoria de codis correctors d'errors
  - S'aplica a totes les formes de comunicació digital: transmissió digital de senyal, DVD, Disc durs,...
- Missatges: paraules de $\mathbb{F}_2^4$, Paraules codi: $\mathbb{F}_2^7$
  - En general: missatges $\mathbb{F}_q^k$, codi: $\mathbb{F}_q^n$

El codi de Hamming (7,4,3)

- Les 16 paraules binàries de longitud 4 es codifiquen amb 7 bits
  0000000, 0001011, 0010101, 0011110, 0100110, 0101101
  0110011, 0111000, 1000111, 1001100, 1010010, 1011001
  1100001, 1101010, 1110100, 1111111
- Propietat: dues paraules codi difereixen com a mínim en tres bits
- 0000 es codifica com 0000000
- 0001 es codifica com 0001011, etc.
- Si es produeix un error, per exemple 0001111
- Resulta que hi ha una única paraula del codi a distància 1 d'aquesta: 0001011, totes les altres estan a distància ≥ 2.
- Aquest és el naixement de la teoria de codis correctors d'errors
  - S'aplica a totes les formes de comunicació digital: transmissió digital de senyal, DVD, Disc durs,...
- Missatges: paraules de $\mathbb{F}_2^4$, Paraules codi: $\mathbb{F}_2^7$
  - En general: missatges $\mathbb{F}_q^k$, codi: $\mathbb{F}_q^n$

El codi de Hamming (7,4,3)

- Les 16 paraules binàries de longitud 4 es codifiquen amb 7 bits
  0000000, 0001011, 0010101, 0011110, 0100110, 0101101
  0110011, 0111000, 1000111, 1001100, 1010010, 1011001
  1100001, 1101010, 1110100, 1111111
- Propietat: dues paraules codi difereixen com a mínim en tres bits
- 0000 es codifica com 0000000
- 0001 es codifica com 0001011, etc.
- Si es produeix un error, per exemple 0001111
- Resulta que hi ha una única paraula del codi a distància 1 d'aquesta: 0001011, totes les altres estan a distància ≥ 2.
- Aquest és el naixement de la teoria de codis correctors d'errors
  - S'aplica a totes les formes de comunicació digital: transmissió digital de senyal, DVD, Disc durs,...
- Missatges: paraules de $\mathbb{F}_2^4$, Paraules codi: $\mathbb{F}_2^7$
  - En general: missatges $\mathbb{F}_q^k$, codi: $\mathbb{F}_q^n$

El codi de Hamming (7,4,3)

- Les 16 paraules binàries de longitud 4 es codifiquen amb 7 bits
  0000000, 0001011, 0010101, 0011110, 0100110, 0101101
  0110011, 0111000, 1000111, 1001100, 1010010, 1011001
  1100001, 1101010, 1110100, 1111111
- Propietat: dues paraules codi difereixen com a mínim en tres bits
- 0000 es codifica com 0000000
- 0001 es codifica com 0001011, etc.
- Si es produeix un error, per exemple 0001111
- Resulta que hi ha una única paraula del codi a distància 1 d'aquesta: 0001011, totes les altres estan a distància ≥ 2.
- Aquest és el naixement de la teoria de codis correctors d'errors
  - S'aplica a totes les formes de comunicació digital: transmissió digital de senyal, DVD, Disc durs,...
- Missatges: paraules de $\mathbb{F}_2^4$, Paraules codi: $\mathbb{F}_2^7$
  - En general: missatges $\mathbb{F}_q^k$, codi: $\mathbb{F}_q^n$

El codi de Hamming (7,4,3)

- Les 16 paraules binàries de longitud 4 es codifiquen amb 7 bits
  0000000, 0001011, 0010101, 0011110, 0100110, 0101101
  0110011, 0111000, 1000111, 1001100, 1010010, 1011001
  1100001, 1101010, 1110100, 1111111
- Propietat: dues paraules codi difereixen com a mínim en tres bits
- 0000 es codifica com 0000000
- 0001 es codifica com 0001011, etc.
- Si es produeix un error, per exemple 0001111
- Resulta que hi ha una única paraula del codi a distància 1 d'aquesta: 0001011, totes les altres estan a distància ≥ 2.
- Aquest és el naixement de la teoria de codis correctors d'errors
  - S'aplica a totes les formes de comunicació digital: transmissió digital de senyal, DVD, Disc durs,...
- Missatges: paraules de $\mathbb{F}_2^4$, Paraules codi: $\mathbb{F}_2^7$
  - En general: missatges $\mathbb{F}_q^k$, codi: $\mathbb{F}_q^n$

Viatge d'anada: Teoria de codis

Distància de Hamming

$u = (u_1, \ldots, u_n), v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{F}_q^n, \quad \mathrm{dh}(u, v) = \#\{i : u_i \neq v_i\}$

- És una distància: $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$

Codi de bloc

Un codi de bloc q-ari de longitud n és un subconjunt $C \subset \mathbb{F}_q^n$

- Distància mínima: $d_C = \min_{\substack{u,v \in C \\ u \neq v}} \mathrm{dh}(u, v)$
- Pot corregir $t_C = \lfloor \frac{d_C - 1}{2} \rfloor$ errors

Problema fonamental de la teoria de codis (obert)

Donats n i d, trobar C de longitud n i distància d amb $\#C$ màxim

- Problema pràctic: trobar bons algoritmes de descodificació
  - Ajuda: posar-hi estructura algebraica

Viatge d'anada: Teoria de codis

Distància de Hamming

$u = (u_1, \ldots, u_n), v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{F}_q^n, \quad \mathrm{dh}(u, v) = \#\{i : u_i \neq v_i\}$

- És una distància: $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$

Codi de bloc

Un codi de bloc q-ari de longitud n és un subconjunt $C \subset \mathbb{F}_q^n$

- Distància mínima: $d_C = \min_{\substack{u,v \in C \\ u \neq v}} \mathrm{dh}(u, v)$
- Pot corregir $t_C = \lfloor \frac{d_C - 1}{2} \rfloor$ errors

Problema fonamental de la teoria de codis (obert)

Donats n i d, trobar C de longitud n i distància d amb $\#C$ màxim

- Problema pràctic: trobar bons algoritmes de descodificació
  - Ajuda: posar-hi estructura algebraica

Viatge d'anada: Teoria de codis

Distància de Hamming

$u = (u_1, \ldots, u_n), v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{F}_q^n, \quad \mathrm{dh}(u, v) = \#\{i : u_i \neq v_i\}$

- És una distància: $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$

Codi de bloc

Un codi de bloc q-ari de longitud n és un subconjunt $C \subset \mathbb{F}_q^n$

- Distància mínima: $d_C = \min_{\substack{u,v \in C \\ u \neq v}} \mathrm{dh}(u, v)$
- Pot corregir $t_C = \lfloor \frac{d_C - 1}{2} \rfloor$ errors

Problema fonamental de la teoria de codis (obert)

Donats n i d, trobar C de longitud n i distància d amb $\#C$ màxim

- Problema pràctic: trobar bons algoritmes de descodificació
  - Ajuda: posar-hi estructura algebraica

Viatge d'anada: Teoria de codis

Distància de Hamming

$u = (u_1, \ldots, u_n), v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{F}_q^n, \quad \mathrm{dh}(u, v) = \#\{i : u_i \neq v_i\}$

- És una distància: $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$

Codi de bloc

Un codi de bloc q-ari de longitud n és un subconjunt $C \subset \mathbb{F}_q^n$

- Distància mínima: $d_C = \min_{\substack{u,v \in C \\ u \neq v}} \mathrm{dh}(u, v)$
- Pot corregir $t_C = \lfloor \frac{d_C - 1}{2} \rfloor$ errors

Problema fonamental de la teoria de codis (obert)

Donats n i d, trobar C de longitud n i distància d amb $\#C$ màxim

- Problema pràctic: trobar bons algoritmes de descodificació
  - Ajuda: posar-hi estructura algebraica

Viatge d'anada: Teoria de codis

Distància de Hamming

$u = (u_1, \ldots, u_n), v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{F}_q^n, \quad \mathrm{dh}(u, v) = \#\{i : u_i \neq v_i\}$

- És una distància: $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$

Codi de bloc

Un codi de bloc q-ari de longitud n és un subconjunt $C \subset \mathbb{F}_q^n$

- Distància mínima: $d_C = \min_{\substack{u,v \in C \\ u \neq v}} \mathrm{dh}(u, v)$
- Pot corregir $t_C = \lfloor \frac{d_C - 1}{2} \rfloor$ errors

Problema fonamental de la teoria de codis (obert)

Donats n i d, trobar C de longitud n i distància d amb $\#C$ màxim

- Problema pràctic: trobar bons algoritmes de descodificació
  - Ajuda: posar-hi estructura algebraica

Viatge d'anada: Teoria de codis

Distància de Hamming

$u = (u_1, \ldots, u_n), v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{F}_q^n, \quad \mathrm{dh}(u, v) = \#\{i : u_i \neq v_i\}$

- És una distància: $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$

Codi de bloc

Un codi de bloc q-ari de longitud n és un subconjunt $C \subset \mathbb{F}_q^n$

- Distància mínima: $d_C = \min_{\substack{u,v \in C \\ u \neq v}} \mathrm{dh}(u, v)$
- Pot corregir $t_C = \lfloor \frac{d_C - 1}{2} \rfloor$ errors

Problema fonamental de la teoria de codis (obert)

Donats n i d, trobar C de longitud n i distància d amb $\#C$ màxim

- Problema pràctic: trobar bons algoritmes de descodificació
  - Ajuda: posar-hi estructura algebraica

Viatge d'anada: Teoria de codis

Distància de Hamming

$u = (u_1, \ldots, u_n), v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{F}_q^n, \quad \mathrm{dh}(u, v) = \#\{i : u_i \neq v_i\}$

- És una distància: $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$

Codi de bloc

Un codi de bloc q-ari de longitud n és un subconjunt $C \subset \mathbb{F}_q^n$

- Distància mínima: $d_C = \min_{\substack{u,v \in C \\ u \neq v}} \mathrm{dh}(u, v)$
- Pot corregir $t_C = \lfloor \frac{d_C - 1}{2} \rfloor$ errors

Problema fonamental de la teoria de codis (obert)

Donats n i d, trobar C de longitud n i distància d amb $\#C$ màxim

- Problema pràctic: trobar bons algoritmes de descodificació
  - Ajuda: posar-hi estructura algebraica

Viatge d'anada: Teoria de codis

Distància de Hamming

$u = (u_1, \ldots, u_n), v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{F}_q^n, \quad \mathrm{dh}(u, v) = \#\{i : u_i \neq v_i\}$

- És una distància: $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$

Codi de bloc

Un codi de bloc q-ari de longitud n és un subconjunt $C \subset \mathbb{F}_q^n$

- Distància mínima: $d_C = \min_{\substack{u,v \in C \\ u \neq v}} \mathrm{dh}(u, v)$
- Pot corregir $t_C = \lfloor \frac{d_C - 1}{2} \rfloor$ errors

Problema fonamental de la teoria de codis (obert)

Donats n i d, trobar C de longitud n i distància d amb $\#C$ màxim

- Problema pràctic: trobar bons algoritmes de descodificació
  - Ajuda: posar-hi estructura algebraica

Viatge d'anada: Teoria de codis

Distància de Hamming

$u = (u_1, \ldots, u_n), v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{F}_q^n, \quad \mathrm{dh}(u, v) = \#\{i : u_i \neq v_i\}$

- És una distància: $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$

Codi de bloc

Un codi de bloc q-ari de longitud n és un subconjunt $C \subset \mathbb{F}_q^n$

- Distància mínima: $d_C = \min_{\substack{u,v \in C \\ u \neq v}} \mathrm{dh}(u, v)$
- Pot corregir $t_C = \lfloor \frac{d_C - 1}{2} \rfloor$ errors

Problema fonamental de la teoria de codis (obert)

Donats n i d, trobar C de longitud n i distància d amb $\#C$ màxim

- Problema pràctic: trobar bons algoritmes de descodificació
  - Ajuda: posar-hi estructura algebraica

Codis lineals

Codis lineals

Un codi lineal és un subespai vectorial $C \subset \mathbb{F}_q^n$

- Si C té dimensió k i distància d, és un codi (n, k, d)
- Conjunt de missatges: $\mathbb{F}_q^k$, les paraules codi són de $\mathbb{F}_q^n \rightsquigarrow$ taxa k/n
- C està completament determinat per una base
- Matriu generadora del codi: té per files una base de C
- $C = \{vG \colon v \in \mathbb{F}_q^k\}$

Hamming (7,4,3)

- $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $C = \{(v_1, v_2, v_3, v_4)G \colon v_i \in \mathbb{F}_2\}$

Codis lineals

Codis lineals

Un codi lineal és un subespai vectorial $C \subset \mathbb{F}_q^n$

- Si C té dimensió k i distància d, és un codi (n, k, d)
- Conjunt de missatges: $\mathbb{F}_q^k$, les paraules codi són de $\mathbb{F}_q^n \rightsquigarrow$ taxa k/n
- C està completament determinat per una base
- Matriu generadora del codi: té per files una base de C
- $C = \{vG \colon v \in \mathbb{F}_q^k\}$

Hamming (7,4,3)

- $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $C = \{(v_1, v_2, v_3, v_4)G \colon v_i \in \mathbb{F}_2\}$

Codis lineals

Codis lineals

Un codi lineal és un subespai vectorial $C \subset \mathbb{F}_q^n$

- Si C té dimensió k i distància d, és un codi (n, k, d)
- Conjunt de missatges: $\mathbb{F}_q^k$, les paraules codi són de $\mathbb{F}_q^n \rightsquigarrow$ taxa k/n
- C està completament determinat per una base
- Matriu generadora del codi: té per files una base de C
- $C = \{vG \colon v \in \mathbb{F}_q^k\}$

Hamming (7,4,3)

- $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $C = \{(v_1, v_2, v_3, v_4)G \colon v_i \in \mathbb{F}_2\}$

Codis lineals

Codis lineals

Un codi lineal és un subespai vectorial $C \subset \mathbb{F}_q^n$

- Si C té dimensió k i distància d, és un codi (n, k, d)
- Conjunt de missatges: $\mathbb{F}_q^k$, les paraules codi són de $\mathbb{F}_q^n \rightsquigarrow$ taxa k/n
- C està completament determinat per una base
- Matriu generadora del codi: té per files una base de C
- $C = \{vG : v \in \mathbb{F}_q^k\}$

Hamming (7,4,3)

- $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $C = \{(v_1, v_2, v_3, v_4)G : v_i \in \mathbb{F}_2\}$

Codis lineals

Codis lineals

Un codi lineal és un subespai vectorial $C \subset \mathbb{F}_q^n$

- Si C té dimensió k i distància d, és un codi (n, k, d)
- Conjunt de missatges: $\mathbb{F}_q^k$, les paraules codi són de $\mathbb{F}_q^n \rightsquigarrow$ taxa k/n
- C està completament determinat per una base
- Matriu generadora del codi: té per files una base de C
- $C = \{vG : v \in \mathbb{F}_q^k\}$

Hamming (7,4,3)

- $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $C = \{(v_1, v_2, v_3, v_4)G : v_i \in \mathbb{F}_2\}$

Codis lineals

Codis lineals

Un codi lineal és un subespai vectorial $C \subset \mathbb{F}_q^n$

- Si C té dimensió k i distància d, és un codi (n, k, d)
- Conjunt de missatges: $\mathbb{F}_q^k$, les paraules codi són de $\mathbb{F}_q^n \rightsquigarrow$ taxa k/n
- C està completament determinat per una base
- Matriu generadora del codi: té per files una base de C
- $C = \{vG : v \in \mathbb{F}_q^k\}$

Hamming (7,4,3)

- $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $C = \{(v_1, v_2, v_3, v_4)G : v_i \in \mathbb{F}_2\}$

Codis lineals

Codis lineals

Un codi lineal és un subespai vectorial $C \subset \mathbb{F}_q^n$

- Si C té dimensió k i distància d, és un codi (n, k, d)
- Conjunt de missatges: $\mathbb{F}_q^k$, les paraules codi són de $\mathbb{F}_q^n \rightsquigarrow$ taxa k/n
- C està completament determinat per una base
- Matriu generadora del codi: té per files una base de C
- $C = \{vG \colon v \in \mathbb{F}_q^k\}$

Hamming (7,4,3)

- $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $C = \{(v_1, v_2, v_3, v_4)G \colon v_i \in \mathbb{F}_2\}$

Codis lineals

Codis lineals

Un codi lineal és un subespai vectorial $C \subset \mathbb{F}_q^n$

- Si C té dimensió k i distància d, és un codi (n, k, d)
- Conjunt de missatges: $\mathbb{F}_q^k$, les paraules codi són de $\mathbb{F}_q^n \rightsquigarrow$ taxa k/n
- C està completament determinat per una base
- Matriu generadora del codi: té per files una base de C
- $C = \{vG \colon v \in \mathbb{F}_q^k\}$

Hamming (7,4,3)

- $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $C = \{(v_1, v_2, v_3, v_4)G \colon v_i \in \mathbb{F}_2\}$

Codis lineals

Codis lineals

Un codi lineal és un subespai vectorial $C \subset \mathbb{F}_q^n$

- Si C té dimensió k i distància d, és un codi (n, k, d)
- Conjunt de missatges: $\mathbb{F}_q^k$, les paraules codi són de $\mathbb{F}_q^n \rightsquigarrow$ taxa k/n
- C està completament determinat per una base
- Matriu generadora del codi: té per files una base de C
- $C = \{vG \colon v \in \mathbb{F}_q^k\}$

Hamming (7,4,3)

- $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $C = \{(v_1, v_2, v_3, v_4)G \colon v_i \in \mathbb{F}_2\}$

Codis lineals

Codis lineals

Un codi lineal és un subespai vectorial $C \subset \mathbb{F}_q^n$

- Si C té dimensió k i distància d, és un codi (n, k, d)
- Conjunt de missatges: $\mathbb{F}_q^k$, les paraules codi són de $\mathbb{F}_q^n \rightsquigarrow$ taxa k/n
- C està completament determinat per una base
- Matriu generadora del codi: té per files una base de C
- $C = \{vG \colon v \in \mathbb{F}_q^k\}$

Hamming (7,4,3)

- $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $C = \{(v_1, v_2, v_3, v_4)G \colon v_i \in \mathbb{F}_2\}$

Codis de Reed–Solomon (1960)

- Prenem $n \in [1, 2, \ldots, q]$ i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in \mathbb{F}_q$ elements diferents
- Sigui $k \leq n$ i $\mathbb{F}_q[x]_k = \{$ polinomis de grau $< k\} \simeq \mathbb{F}_q^k$
- L'aplicació avaluació en $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ és injectiva:

$$\begin{array}{rccc} \epsilon: & \mathbb{F}_q[x]_k \simeq \mathbb{F}_q^k & \longrightarrow & \mathbb{F}_q^n \\ & f(x) & \longmapsto & (f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_n)) \end{array}$$

  ja que un polinomi té com a màxim $k-1$ zeros i $n > k-1$.
- $\mathrm{RS}_\alpha(k) = \epsilon\left(\mathbb{F}_q[x]_k\right)$
- Dos polinomis diferents poden prendre el mateix valor en com a màxim $k-1$ dels $\alpha_i \rightsquigarrow$ distància del codi $\geq n - (k-1)$
- Matriu generadora: $V_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$
- Bons algoritmes de decodificació (basats en algoritme d'Euclides)
- Nombroses aplicacions:
  - Comunicació digital (Wi-Fi, fibra). En estàndards moderns LDPC
  - CD, DVD, Codis QR
  - TV digital ($\mathrm{RS}(255, 239, 16)$ sobre $\mathbb{F}_{2^8}$)
  - Sondes voyager: llançades el 1977, encara avui envien fotografies

Codis de Reed–Solomon (1960)

- Prenem $n \in [1, 2, \ldots, q]$ i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in \mathbb{F}_q$ elements diferents
- Sigui $k \leq n$ i $\mathbb{F}_q[x]_k = \{$ polinomis de grau $< k\} \simeq \mathbb{F}_q^k$
- L'aplicació avaluació en $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ és injectiva:

$$\begin{array}{rccc} \epsilon: & \mathbb{F}_q[x]_k \simeq \mathbb{F}_q^k & \longrightarrow & \mathbb{F}_q^n \\ & f(x) & \longmapsto & (f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_n)) \end{array}$$

  ja que un polinomi té com a màxim $k-1$ zeros i $n > k-1$.
- $\mathrm{RS}_\alpha(k) = \epsilon\left(\mathbb{F}_q[x]_k\right)$
- Dos polinomis diferents poden prendre el mateix valor en com a màxim $k-1$ dels $\alpha_i \rightsquigarrow$ distància del codi $\geq n - (k-1)$
- Matriu generadora: $V_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$
- Bons algoritmes de decodificació (basats en algoritme d'Euclides)
- Nombroses aplicacions:
  - Comunicació digital (Wi-Fi, fibra). En estàndards moderns LDPC
  - CD, DVD, Codis QR
  - TV digital ($\mathrm{RS}(255, 239, 16)$ sobre $\mathbb{F}_{2^8}$)
  - Sondes voyager: llançades el 1977, encara avui envien fotografies

Codis de Reed–Solomon (1960)

- Prenem $n \in [1, 2, \ldots, q]$ i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in \mathbb{F}_q$ elements diferents
- Sigui $k \leq n$ i $\mathbb{F}_q[x]_k = \{$ polinomis de grau $< k\} \simeq \mathbb{F}_q^k$
- L'aplicació avaluació en $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ és injectiva:

$$\begin{array}{rccc} \epsilon: & \mathbb{F}_q[x]_k \simeq \mathbb{F}_q^k & \longrightarrow & \mathbb{F}_q^n \\ & f(x) & \longmapsto & (f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_n)) \end{array}$$

  ja que un polinomi té com a màxim $k-1$ zeros i $n > k-1$.
- $\mathrm{RS}_\alpha(k) = \epsilon\left(\mathbb{F}_q[x]_k\right)$
- Dos polinomis diferents poden prendre el mateix valor en com a màxim $k-1$ dels $\alpha_i \rightsquigarrow$ distància del codi $\geq n - (k-1)$
- Matriu generadora: $V_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$
- Bons algoritmes de decodificació (basats en algoritme d'Euclides)
- Nombroses aplicacions:
  - Comunicació digital (Wi-Fi, fibra). En estàndards moderns LDPC
  - CD, DVD, Codis QR
  - TV digital ($\mathrm{RS}(255, 239, 16)$ sobre $\mathbb{F}_{2^8}$)
  - Sondes voyager: llançades el 1977, encara avui envien fotografies

Codis de Reed–Solomon (1960)

- Prenem $n \in [1, 2, \ldots, q]$ i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in \mathbb{F}_q$ elements diferents
- Sigui $k \leq n$ i $\mathbb{F}_q[x]_k = \{$ polinomis de grau $< k\} \simeq \mathbb{F}_q^k$
- L'aplicació avaluació en $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ és injectiva:

$$\begin{array}{rccc} \epsilon: & \mathbb{F}_q[x]_k \simeq \mathbb{F}_q^k & \longrightarrow & \mathbb{F}_q^n \\ & f(x) & \longmapsto & (f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_n)) \end{array}$$

  ja que un polinomi té com a màxim $k-1$ zeros i $n > k-1$.

- $\mathrm{RS}_\alpha(k) = \epsilon\left(\mathbb{F}_q[x]_k\right)$
- Dos polinomis diferents poden prendre el mateix valor en com a màxim $k-1$ dels $\alpha_i \rightsquigarrow$ distància del codi $\geq n - (k-1)$
- Matriu generadora: $V_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$
- Bons algoritmes de decodificació (basats en algoritme d'Euclides)
- Nombroses aplicacions:
  - Comunicació digital (Wi-Fi, fibra). En estàndards moderns LDPC
  - CD, DVD, Codis QR
  - TV digital ($\mathrm{RS}(255, 239, 16)$ sobre $\mathbb{F}_{2^8}$)
  - Sondes voyager: llançades el 1977, encara avui envien fotografies

Codis de Reed–Solomon (1960)

- Prenem $n \in [1, 2, \ldots, q]$ i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in \mathbb{F}_q$ elements diferents
- Sigui $k \leq n$ i $\mathbb{F}_q[x]_k = \{$ polinomis de grau $< k\} \simeq \mathbb{F}_q^k$
- L'aplicació avaluació en $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ és injectiva:

$$\begin{array}{rccc} \epsilon: & \mathbb{F}_q[x]_k \simeq \mathbb{F}_q^k & \longrightarrow & \mathbb{F}_q^n \\ & f(x) & \longmapsto & (f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_n)) \end{array}$$

  ja que un polinomi té com a màxim $k-1$ zeros i $n > k-1$.
- $\mathrm{RS}_\alpha(k) = \epsilon\left(\mathbb{F}_q[x]_k\right)$
- Dos polinomis diferents poden prendre el mateix valor en com a màxim $k-1$ dels $\alpha_i \rightsquigarrow$ distància del codi $\geq n - (k-1)$
- Matriu generadora: $V_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$
- Bons algoritmes de decodificació (basats en algoritme d'Euclides)
- Nombroses aplicacions:
  - Comunicació digital (Wi-Fi, fibra). En estàndards moderns LDPC
  - CD, DVD, Codis QR
  - TV digital ($RS(255, 239, 16)$ sobre $\mathbb{F}_{2^8}$)
  - Sondes voyager: llançades el 1977, encara avui envien fotografies

Codis de Reed–Solomon (1960)

- Prenem $n \in [1, 2, \ldots, q]$ i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in \mathbb{F}_q$ elements diferents
- Sigui $k \leq n$ i $\mathbb{F}_q[x]_k = \{$ polinomis de grau $< k\} \simeq \mathbb{F}_q^k$
- L'aplicació avaluació en $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ és injectiva:

$$\begin{array}{rccc} \epsilon: & \mathbb{F}_q[x]_k \simeq \mathbb{F}_q^k & \longrightarrow & \mathbb{F}_q^n \\ & f(x) & \longmapsto & (f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_n)) \end{array}$$

  ja que un polinomi té com a màxim $k-1$ zeros i $n > k-1$.
- $\mathrm{RS}_\alpha(k) = \epsilon\left(\mathbb{F}_q[x]_k\right)$
- Dos polinomis diferents poden prendre el mateix valor en com a màxim $k-1$ dels $\alpha_i \rightsquigarrow$ distància del codi $\geq n-(k-1)$
- Matriu generadora: $V_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$
- Bons algoritmes de decodificació (basats en algoritme d'Euclides)
- Nombroses aplicacions:
  - Comunicació digital (Wi-Fi, fibra). En estàndards moderns LDPC
  - CD, DVD, Codis QR
  - TV digital ($\mathrm{RS}(255, 239, 16)$ sobre $\mathbb{F}_{2^8}$)
  - Sondes voyager: llançades el 1977, encara avui envien fotografies

Codis de Reed–Solomon (1960)

- Prenem $n \in [1, 2, \ldots, q]$ i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in \mathbb{F}_q$ elements diferents
- Sigui $k \leq n$ i $\mathbb{F}_q[x]_k = \{$ polinomis de grau $< k\} \simeq \mathbb{F}_q^k$
- L'aplicació avaluació en $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ és injectiva:

$$\begin{array}{rccc} \epsilon: & \mathbb{F}_q[x]_k \simeq \mathbb{F}_q^k & \longrightarrow & \mathbb{F}_q^n \\ & f(x) & \longmapsto & (f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_n)) \end{array}$$

  ja que un polinomi té com a màxim $k-1$ zeros i $n > k-1$.
- $\mathrm{RS}_\alpha(k) = \epsilon\left(\mathbb{F}_q[x]_k\right)$
- Dos polinomis diferents poden prendre el mateix valor en com a màxim $k-1$ dels $\alpha_i \rightsquigarrow$ distància del codi $\geq n-(k-1)$
- Matriu generadora: $V_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$
- Bons algoritmes de decodificació (basats en algoritme d'Euclides)
- Nombroses aplicacions:
  - Comunicació digital (Wi-Fi, fibra). En estàndards moderns LDPC
  - CD, DVD, Codis QR
  - TV digital ($RS(255, 239, 16)$ sobre $\mathbb{F}_{2^8}$)
  - Sondes voyager: llançades el 1977, encara avui envien fotografies

Codis de Reed–Solomon (1960)

- Prenem $n \in [1, 2, \ldots, q]$ i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in \mathbb{F}_q$ elements diferents
- Sigui $k \leq n$ i $\mathbb{F}_q[x]_k = \{$ polinomis de grau $< k\} \simeq \mathbb{F}_q^k$
- L'aplicació avaluació en $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ és injectiva:

$$\begin{array}{rccc} \epsilon: & \mathbb{F}_q[x]_k \simeq \mathbb{F}_q^k & \longrightarrow & \mathbb{F}_q^n \\ & f(x) & \longmapsto & (f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_n)) \end{array}$$

  ja que un polinomi té com a màxim $k-1$ zeros i $n > k-1$.
- $\mathrm{RS}_\alpha(k) = \epsilon\left(\mathbb{F}_q[x]_k\right)$
- Dos polinomis diferents poden prendre el mateix valor en com a màxim $k-1$ dels $\alpha_i \rightsquigarrow$ distància del codi $\geq n-(k-1)$
- Matriu generadora: $V_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$
- Bons algoritmes de decodificació (basats en algoritme d'Euclides)
- Nombroses aplicacions:
  - Comunicació digital (Wi-Fi, fibra). En estàndards moderns LDPC
  - CD, DVD, Codis QR
  - TV digital ($\mathrm{RS}(255, 239, 16)$ sobre $\mathbb{F}_{2^8}$)
  - Sondes voyager: llançades el 1977, encara avui envien fotografies

Codis de Reed–Solomon (1960)

- Prenem $n \in [1, 2, \ldots, q]$ i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in \mathbb{F}_q$ elements diferents
- Sigui $k \leq n$ i $\mathbb{F}_q[x]_k = \{$ polinomis de grau $< k\} \simeq \mathbb{F}_q^k$
- L'aplicació avaluació en $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ és injectiva:

$$\begin{array}{rccc} \epsilon: & \mathbb{F}_q[x]_k \simeq \mathbb{F}_q^k & \longrightarrow & \mathbb{F}_q^n \\ & f(x) & \longmapsto & (f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_n)) \end{array}$$

  ja que un polinomi té com a màxim $k-1$ zeros i $n > k-1$.
- $\mathrm{RS}_\alpha(k) = \epsilon\left(\mathbb{F}_q[x]_k\right)$
- Dos polinomis diferents poden prendre el mateix valor en com a màxim $k-1$ dels $\alpha_i \rightsquigarrow$ distància del codi $\geq n-(k-1)$
- Matriu generadora: $V_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$
- Bons algoritmes de decodificació (basats en algoritme d'Euclides)
- Nombroses aplicacions:
  - Comunicació digital (Wi-Fi, fibra). En estàndards moderns LDPC
  - CD, DVD, Codis QR
  - TV digital ($\mathrm{RS}(255, 239, 16)$ sobre $\mathbb{F}_{2^8}$)
  - Sondes voyager: llançades el 1977, encara avui envien fotografies

Viatge de tornada: empaquetament d'esferes

Empaquetament d'esferes a $\mathbb{R}^n$

- Sigui $S \subset \mathbb{R}^n$ una esfera oberta n-dimensional
- $c_1, c_2, \ldots$ una seqüència infinita de punts a $\mathbb{R}^n$
- Empaquetament: si els traslladats $c_1 + S, c_2 + S, \ldots$ són disjunts
- Densitat d'empaquetament: fracció de $\mathbb{R}^n$ coberta per les esferes

Problema

Seleccionar els centres per tal de maximitzar la densitat

- En dimensió 1 el problema és trivial: la densitat màxima és 1
- En dimensió 2 és fàcil trobar l'empaquetament òptim

- En el segon $\delta = \pi/\sqrt{12} \simeq 0.906$, i és òptim (Thue, 1892)

Viatge de tornada: empaquetament d'esferes

Empaquetament d'esferes a $\mathbb{R}^n$

- Sigui $S \subset \mathbb{R}^n$ una esfera oberta n-dimensional
- $c_1, c_2, \ldots$ una seqüència infinita de punts a $\mathbb{R}^n$
- Empaquetament: si els traslladats $c_1 + S, c_2 + S, \ldots$ són disjunts
- Densitat d'empaquetament: fracció de $\mathbb{R}^n$ coberta per les esferes

Problema

Seleccionar els centres per tal de maximitzar la densitat

- En dimensió 1 el problema és trivial: la densitat màxima és 1
- En dimensió 2 és fàcil trobar l'empaquetament òptim

- En el segon $\delta = \pi/\sqrt{12} \simeq 0.906$, i és òptim (Thue, 1892)

Viatge de tornada: empaquetament d'esferes

Empaquetament d'esferes a $\mathbb{R}^n$

- Sigui $S \subset \mathbb{R}^n$ una esfera oberta n-dimensional
- $c_1, c_2, \ldots$ una seqüència infinita de punts a $\mathbb{R}^n$
- Empaquetament: si els traslladats $c_1 + S, c_2 + S, \ldots$ són disjunts
- Densitat d'empaquetament: fracció de $\mathbb{R}^n$ coberta per les esferes

Problema

Seleccionar els centres per tal de maximitzar la densitat

- En dimensió 1 el problema és trivial: la densitat màxima és 1
- En dimensió 2 és fàcil trobar l'empaquetament òptim

- En el segon $\delta = \pi/\sqrt{12} \simeq 0.906$, i és òptim (Thue, 1892)

Viatge de tornada: empaquetament d'esferes

Empaquetament d'esferes a $\mathbb{R}^n$

- Sigui $S \subset \mathbb{R}^n$ una esfera oberta n-dimensional
- $c_1, c_2, \ldots$ una seqüència infinita de punts a $\mathbb{R}^n$
- Empaquetament: si els traslladats $c_1 + S, c_2 + S, \ldots$ són disjunts
- Densitat d'empaquetament: fracció de $\mathbb{R}^n$ coberta per les esferes

Problema

Seleccionar els centres per tal de maximitzar la densitat

- En dimensió 1 el problema és trivial: la densitat màxima és 1
- En dimensió 2 és fàcil trobar l'empaquetament òptim

- En el segon $\delta = \pi/\sqrt{12} \simeq 0.906$, i és òptim (Thue, 1892)

Viatge de tornada: empaquetament d'esferes

Empaquetament d'esferes a $\mathbb{R}^n$

- Sigui $S \subset \mathbb{R}^n$ una esfera oberta n-dimensional
- $c_1, c_2, \ldots$ una seqüència infinita de punts a $\mathbb{R}^n$
- Empaquetament: si els traslladats $c_1 + S, c_2 + S, \ldots$ són disjunts
- Densitat d'empaquetament: fracció de $\mathbb{R}^n$ coberta per les esferes

Problema

Seleccionar els centres per tal de maximitzar la densitat

- En dimensió 1 el problema és trivial: la densitat màxima és 1
- En dimensió 2 és fàcil trobar l'empaquetament òptim

- En el segon $\delta = \pi/\sqrt{12} \simeq 0.906$, i és òptim (Thue, 1892)

Viatge de tornada: empaquetament d'esferes

Empaquetament d'esferes a $\mathbb{R}^n$

- Sigui $S \subset \mathbb{R}^n$ una esfera oberta n-dimensional
- $c_1, c_2, \ldots$ una seqüència infinita de punts a $\mathbb{R}^n$
- Empaquetament: si els traslladats $c_1 + S, c_2 + S, \ldots$ són disjunts
- Densitat d'empaquetament: fracció de $\mathbb{R}^n$ coberta per les esferes

Problema

Seleccionar els centres per tal de maximitzar la densitat

- En dimensió 1 el problema és trivial: la densitat màxima és 1
- En dimensió 2 és fàcil trobar l'empaquetament òptim

- En el segon $\delta = \pi/\sqrt{12} \simeq 0.906$, i és òptim (Thue, 1892)

Viatge de tornada: empaquetament d'esferes

Empaquetament d'esferes a $\mathbb{R}^n$

- Sigui $S \subset \mathbb{R}^n$ una esfera oberta n-dimensional
- $c_1, c_2, \ldots$ una seqüència infinita de punts a $\mathbb{R}^n$
- Empaquetament: si els traslladats $c_1 + S, c_2 + S, \ldots$ són disjunts
- Densitat d'empaquetament: fracció de $\mathbb{R}^n$ coberta per les esferes

Problema

Seleccionar els centres per tal de maximitzar la densitat

- En dimensió 1 el problema és trivial: la densitat màxima és 1
- En dimensió 2 és fàcil trobar l'empaquetament òptim
- En el segon $\delta = \pi/\sqrt{12} \simeq 0.906$, i és òptim (Thue, 1892)

Viatge de tornada: empaquetament d'esferes

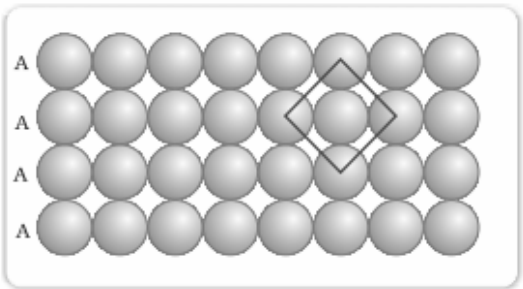
Empaquetament d'esferes a $\mathbb{R}^n$

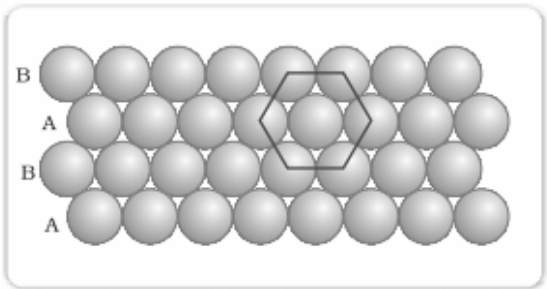
- Sigui $S \subset \mathbb{R}^n$ una esfera oberta n-dimensional
- $c_1, c_2, \ldots$ una seqüència infinita de punts a $\mathbb{R}^n$
- Empaquetament: si els traslladats $c_1 + S, c_2 + S, \ldots$ són disjunts
- Densitat d'empaquetament: fracció de $\mathbb{R}^n$ coberta per les esferes

Problema

Seleccionar els centres per tal de maximitzar la densitat

- En dimensió 1 el problema és trivial: la densitat màxima és 1
- En dimensió 2 és fàcil trobar l'empaquetament òptim





- En el segon $\delta = \pi/\sqrt{12} \simeq 0.906$, i és òptim (Thue, 1892)

Viatge de tornada: empaquetament d'esferes

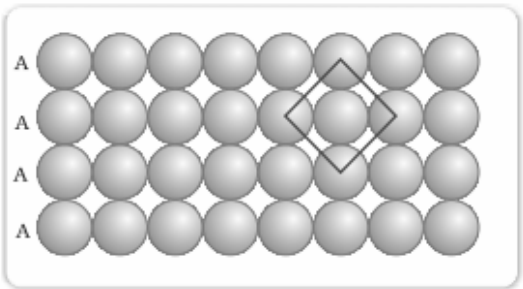
Empaquetament d'esferes a $\mathbb{R}^n$

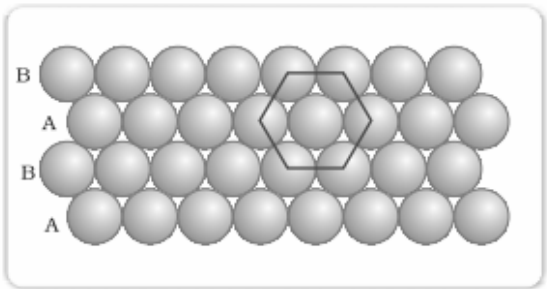
- Sigui $S \subset \mathbb{R}^n$ una esfera oberta n-dimensional
- $c_1, c_2, \ldots$ una seqüència infinita de punts a $\mathbb{R}^n$
- Empaquetament: si els traslladats $c_1 + S, c_2 + S, \ldots$ són disjunts
- Densitat d'empaquetament: fracció de $\mathbb{R}^n$ coberta per les esferes

Problema

Seleccionar els centres per tal de maximitzar la densitat

- En dimensió 1 el problema és trivial: la densitat màxima és 1
- En dimensió 2 és fàcil trobar l'empaquetament òptim





- En el segon $\delta = \pi/\sqrt{12} \simeq 0.906$, i és òptim (Thue, 1892)

Dimensió 3

- En $n = 3$ trobem empaquetaments òptims a partir del de $n = 2$:

- Té $\delta = \frac{\pi/3}{\sqrt{2}} \simeq 0.74$, però és difícil provar aquest δ és òptim
- Conjecturat per Kepler el 1611
- Provat per Thomas Hales el 2005: prova molt complicada i amb molts càlculs d'ordinador, però verificada formalment el 2017.
- De fet hi ha infinits empaquetaments òptims
- En dimensió superior a 3 els empaquetaments òptims en dimensió inferior no ajuden
- Fins fa poc, no se sabia el δ òptim per cap $n > 3$

Dimensió 3

- En $n = 3$ trobem empaquetaments òptims a partir del de $n = 2$:

- Té $\delta = \frac{\pi/3}{\sqrt{2}} \simeq 0.74$, però és difícil provar aquest δ és òptim
- Conjecturat per Kepler el 1611
- Provat per Thomas Hales el 2005: prova molt complicada i amb molts càlculs d'ordinador, però verificada formalment el 2017.
- De fet hi ha infinits empaquetaments òptims
- En dimensió superior a 3 els empaquetaments òptims en dimensió inferior no ajuden
- Fins fa poc, no se sabia el δ òptim per cap $n > 3$

Dimensió 3

- En $n = 3$ trobem empaquetaments òptims a partir del de $n = 2$:

- Té $\delta = \frac{\pi/3}{\sqrt{2}} \simeq 0.74$, però és difícil provar aquest δ és òptim
- Conjecturat per Kepler el 1611
- Provat per Thomas Hales el 2005: prova molt complicada i amb molts càlculs d'ordinador, però verificada formalment el 2017.
- De fet hi ha infinits empaquetaments òptims
- En dimensió superior a 3 els empaquetaments òptims en dimensió inferior no ajuden
- Fins fa poc, no se sabia el δ òptim per cap $n > 3$

Dimensió 3

- En $n = 3$ trobem empaquetaments òptims a partir del de $n = 2$:

- Té $\delta = \frac{\pi/3}{\sqrt{2}} \simeq 0.74$, però és difícil provar aquest δ és òptim
- Conjecturat per Kepler el 1611
- Provat per Thomas Hales el 2005: prova molt complicada i amb molts càlculs d'ordinador, però verificada formalment el 2017.
- De fet hi ha infinits empaquetaments òptims
- En dimensió superior a 3 els empaquetaments òptims en dimensió inferior no ajuden
- Fins fa poc, no se sabia el δ òptim per cap $n > 3$

Dimensió 3

- En $n = 3$ trobem empaquetaments òptims a partir del de $n = 2$:

- Té $\delta = \frac{\pi/3}{\sqrt{2}} \simeq 0.74$, però és difícil provar aquest δ és òptim
- Conjecturat per Kepler el 1611
- Provat per Thomas Hales el 2005: prova molt complicada i amb molts càlculs d'ordinador, però verificada formalment el 2017.
- De fet hi ha infinits empaquetaments òptims
- En dimensió superior a 3 els empaquetaments òptims en dimensió inferior no ajuden
- Fins fa poc, no se sabia el δ òptim per cap $n > 3$

Dimensió 3

- En $n = 3$ trobem empaquetaments òptims a partir del de $n = 2$:

- Té $\delta = \frac{\pi/3}{\sqrt{2}} \simeq 0.74$, però és difícil provar aquest δ és òptim
- Conjecturat per Kepler el 1611
- Provat per Thomas Hales el 2005: prova molt complicada i amb molts càlculs d'ordinador, però verificada formalment el 2017.
- De fet hi ha infinits empaquetaments òptims
- En dimensió superior a 3 els empaquetaments òptims en dimensió inferior no ajuden
- Fins fa poc, no se sabia el δ òptim per cap $n > 3$

Dimensió 3

- En $n = 3$ trobem empaquetaments òptims a partir del de $n = 2$:

- Té $\delta = \frac{\pi/3}{\sqrt{2}} \simeq 0.74$, però és difícil provar aquest δ és òptim
- Conjecturat per Kepler el 1611
- Provat per Thomas Hales el 2005: prova molt complicada i amb molts càlculs d'ordinador, però verificada formalment el 2017.
- De fet hi ha infinits empaquetaments òptims
- En dimensió superior a 3 els empaquetaments òptims en dimensió inferior no ajuden
- Fins fa poc, no se sabia el δ òptim per cap $n > 3$

Empaquetaments i codis

Construcció fonamental

- Morfisme de reducció mòdul p: $\pi : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{F}_p^n$
- Si $C \subset \mathbb{F}_p^n$ és un codi, considerem $\Lambda_C := \pi^{-1}(C)$
- Col·lecció de centres amb bones propietats d'empaquetament

- Dimensions 8 i 24: dos empaquetaments E_8 i Λ_{24} molt especials que s'obtenenen d'aquesta construcció per a certs codis:
- Per $n = 8$: codi $\mathcal{H}_8$ Hamming estès $(8, 4, 4)$ (bit extra de paritat)

$$E_8 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} v : v \in \mathbb{Z}^8,\ v \pmod 2 \in \mathcal{H}_8 \right\}$$

- $n = 24$: codi $\mathcal{G}_{24}$ de Golay binari estès $(24, 12, 8)$. Primer definim:

$L_{24} = \{ \frac{1}{\sqrt{2}} v : v \in \mathbb{Z}^{24},\ v \pmod 2 \in \mathcal{G}_{24} \}$, d'on s'obté el reticle de Leech

$$\Lambda_{24} = L'_{24} \cup (1, 1, \ldots, 1) + L'_{24}, \text{ on } L'_{24} = \{ v \in L_{24} : \sqrt{2} \sum_{i=1}^{24} v_i \equiv 0 \pmod 4 \}$$

Empaquetaments i codis

Construcció fonamental

- Morfisme de reducció mòdul p: $\pi : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{F}_p^n$
- Si $C \subset \mathbb{F}_p^n$ és un codi, considerem $\Lambda_C := \pi^{-1}(C)$
- Col·lecció de centres amb bones propietats d'empaquetament

- Dimensions 8 i 24: dos empaquetaments E_8 i Λ_{24} molt especials que s'obtenenen d'aquesta construcció per a certs codis:
- Per $n = 8$: codi $\mathcal{H}_8$ Hamming estès $(8, 4, 4)$ (bit extra de paritat)

$$E_8 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} v : v \in \mathbb{Z}^8,\ v \pmod 2 \in \mathcal{H}_8 \right\}$$

- $n = 24$: codi $\mathcal{G}_{24}$ de Golay binari estès $(24, 12, 8)$. Primer definim:

$L_{24} = \{ \frac{1}{\sqrt{2}} v : v \in \mathbb{Z}^{24},\ v \pmod 2 \in \mathcal{G}_{24} \}$, d'on s'obté el reticle de Leech

$$\Lambda_{24} = L'_{24} \cup (1, 1, \ldots, 1) + L'_{24}, \text{ on } L'_{24} = \{ v \in L_{24} : \sqrt{2} \sum_{i=1}^{24} v_i \equiv 0 \pmod 4 \}$$

Empaquetaments i codis

Construcció fonamental

- Morfisme de reducció mòdul p: $\pi : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{F}_p^n$
- Si $C \subset \mathbb{F}_p^n$ és un codi, considerem $\Lambda_C := \pi^{-1}(C)$
- Col·lecció de centres amb bones propietats d'empaquetament

- Dimensions 8 i 24: dos empaquetaments E_8 i Λ_{24} molt especials que s'obtenenen d'aquesta construcció per a certs codis:
- Per $n = 8$: codi $\mathcal{H}_8$ Hamming estès $(8, 4, 4)$ (bit extra de paritat)

$$E_8 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} v : v \in \mathbb{Z}^8,\ v \pmod 2 \in \mathcal{H}_8 \right\}$$

- $n = 24$: codi $\mathcal{G}_{24}$ de Golay binari estès $(24, 12, 8)$. Primer definim:

$L_{24} = \{ \frac{1}{\sqrt{2}} v : v \in \mathbb{Z}^{24},\ v \pmod 2 \in \mathcal{G}_{24} \}$, d'on s'obté el reticle de Leech

$$\Lambda_{24} = L'_{24} \cup (1, 1, \ldots, 1) + L'_{24}, \text{ on } L'_{24} = \{ v \in L_{24} : \sqrt{2} \sum_{i=1}^{24} v_i \equiv 0 \pmod 4 \}$$

Empaquetaments i codis

Construcció fonamental

- Morfisme de reducció mòdul p: $\pi : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{F}_p^n$
- Si $C \subset \mathbb{F}_p^n$ és un codi, considerem $\Lambda_C := \pi^{-1}(C)$
- Col·lecció de centres amb bones propietats d'empaquetament

- Dimensions 8 i 24: dos empaquetaments E_8 i Λ_{24} molt especials que s'obtenenen d'aquesta construcció per a certs codis:
- Per $n = 8$: codi $\mathcal{H}_8$ Hamming estès $(8, 4, 4)$ (bit extra de paritat)

$$E_8 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} v : v \in \mathbb{Z}^8,\ v \pmod 2 \in \mathcal{H}_8 \right\}$$

- $n = 24$: codi $\mathcal{G}_{24}$ de Golay binari estès $(24, 12, 8)$. Primer definim:

$L_{24} = \{ \frac{1}{\sqrt{2}} v : v \in \mathbb{Z}^{24},\ v \pmod 2 \in \mathcal{G}_{24} \}$, d'on s'obté el reticle de Leech

$$\Lambda_{24} = L'_{24} \cup (1, 1, \ldots, 1) + L'_{24}, \text{ on } L'_{24} = \{ v \in L_{24} : \sqrt{2} \sum_{i=1}^{24} v_i \equiv 0 \pmod 4 \}$$

Empaquetaments i codis

Construcció fonamental

- Morfisme de reducció mòdul p: $\pi : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{F}_p^n$
- Si $C \subset \mathbb{F}_p^n$ és un codi, considerem $\Lambda_C := \pi^{-1}(C)$
- Col·lecció de centres amb bones propietats d'empaquetament

- Dimensions 8 i 24: dos empaquetaments E_8 i Λ_{24} molt especials que s'obtenenen d'aquesta construcció per a certs codis:
- Per $n = 8$: codi $\mathcal{H}_8$ Hamming estès $(8, 4, 4)$ (bit extra de paritat)

$$E_8 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} v : v \in \mathbb{Z}^8,\ v \pmod 2 \in \mathcal{H}_8 \right\}$$

- $n = 24$: codi $\mathcal{G}_{24}$ de Golay binari estès $(24, 12, 8)$. Primer definim:

$L_{24} = \{ \frac{1}{\sqrt{2}} v : v \in \mathbb{Z}^{24},\ v \pmod 2 \in \mathcal{G}_{24} \}$, d'on s'obté el reticle de Leech

$$\Lambda_{24} = L'_{24} \cup (1, 1, \ldots, 1) + L'_{24}, \text{ on } L'_{24} = \{ v \in L_{24} : \sqrt{2} \sum_{i=1}^{24} v_i \equiv 0 \pmod 4 \}$$

Empaquetaments i codis

Construcció fonamental

- Morfisme de reducció mòdul p: $\pi : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{F}_p^n$
- Si $C \subset \mathbb{F}_p^n$ és un codi, considerem $\Lambda_C := \pi^{-1}(C)$
- Col·lecció de centres amb bones propietats d'empaquetament

- Dimensions 8 i 24: dos empaquetaments E_8 i Λ_{24} molt especials que s'obtenenen d'aquesta construcció per a certs codis:
- Per $n = 8$: codi $\mathcal{H}_8$ Hamming estès $(8, 4, 4)$ (bit extra de paritat)

$$E_8 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} v : v \in \mathbb{Z}^8,\ v \pmod 2 \in \mathcal{H}_8 \right\}$$

- $n = 24$: codi $\mathcal{G}_{24}$ de Golay binari estès $(24, 12, 8)$. Primer definim:

$L_{24} = \{ \frac{1}{\sqrt{2}} v : v \in \mathbb{Z}^{24},\ v \pmod 2 \in \mathcal{G}_{24} \}$, d'on s'obté el reticle de Leech

$$\Lambda_{24} = L'_{24} \cup (1, 1, \ldots, 1) + L'_{24}, \text{ on } L'_{24} = \{ v \in L_{24} : \sqrt{2} \sum_{i=1}^{24} v_i \equiv 0 \pmod 4 \}$$

Empaquetaments i codis

Construcció fonamental

- Morfisme de reducció mòdul p: $\pi : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{F}_p^n$
- Si $C \subset \mathbb{F}_p^n$ és un codi, considerem $\Lambda_C := \pi^{-1}(C)$
- Col·lecció de centres amb bones propietats d'empaquetament

- Dimensions 8 i 24: dos empaquetaments E_8 i Λ_{24} molt especials que s'obtenenen d'aquesta construcció per a certs codis:
- Per $n = 8$: codi $\mathcal{H}_8$ Hamming estès $(8, 4, 4)$ (bit extra de paritat)

$$E_8 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} v : v \in \mathbb{Z}^8,\ v \pmod 2 \in \mathcal{H}_8 \right\}$$

- $n = 24$: codi $\mathcal{G}_{24}$ de Golay binari estès $(24, 12, 8)$. Primer definim:

$L_{24} = \{ \frac{1}{\sqrt{2}} v : v \in \mathbb{Z}^{24},\ v \pmod 2 \in \mathcal{G}_{24} \}$, d'on s'obté el reticle de Leech

$$\Lambda_{24} = L'_{24} \cup (1, 1, \ldots, 1) + L'_{24}, \text{ on } L'_{24} = \{ v \in L_{24} : \sqrt{2} \sum_{i=1}^{24} v_i \equiv 0 \pmod 4 \}$$

Codis cíclics

- Isomorfisme d'espais vectorials $\mathbb{F}_q^n \simeq \mathbb{F}_q[x]/(x^n - 1)$
- L'espai de la dreta té una estructura d'anell

Codi cíclic

El subespai donat per un ideal de $\mathbb{F}_q[x]/(x^n - 1)$

- Obs: si $(a_0, a_1 \ldots, a_{n-1}) \in C$ es correspon amb $a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$ aleshores $x(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1})$ és del codi i per tant $(a_{n-1}, a_0, \ldots, a_{n-2}) \in C$
- Tot codi cíclic és generat per un polinomi $f \mid x^n - 1$
- Codi de Golay binari:
  - A $\mathbb{F}_2[x]$ el polinomi $x^{23} - 1$ factoritza com:

$$(x+1)\cdot(x^{11}+x^9+x^7+x^6+x^5+x+1)\cdot(x^{11}+x^{10}+x^6+x^5+x^4+x^2+1)$$

  - És el generat per un dels factors de grau 11, és un codi $(23, 12, 7)$
  - El codi estès $(24, 12, 8)$ s'obté afegint un bit de paritat

Codis cíclics

- Isomorfisme d'espais vectorials $\mathbb{F}_q^n \simeq \mathbb{F}_q[x]/(x^n - 1)$
- L'espai de la dreta té una estructura d'anell

Codi cíclic

El subespai donat per un ideal de $\mathbb{F}_q[x]/(x^n - 1)$

- Obs: si $(a_0, a_1 \ldots, a_{n-1}) \in C$ es correspon amb $a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$ aleshores $x(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1})$ és del codi i per tant $(a_{n-1}, a_0, \ldots, a_{n-2}) \in C$
- Tot codi cíclic és generat per un polinomi $f \mid x^n - 1$
- Codi de Golay binari:
  - A $\mathbb{F}_2[x]$ el polinomi $x^{23} - 1$ factoritza com:

$$(x+1)\cdot(x^{11}+x^9+x^7+x^6+x^5+x+1)\cdot(x^{11}+x^{10}+x^6+x^5+x^4+x^2+1)$$

  - És el generat per un dels factors de grau 11, és un codi $(23, 12, 7)$
  - El codi estès $(24, 12, 8)$ s'obté afegint un bit de paritat

Codis cíclics

- Isomorfisme d'espais vectorials $\mathbb{F}_q^n \simeq \mathbb{F}_q[x]/(x^n - 1)$
- L'espai de la dreta té una estructura d'anell

Codi cíclic

El subespai donat per un ideal de $\mathbb{F}_q[x]/(x^n - 1)$

- Obs: si $(a_0, a_1 \ldots, a_{n-1}) \in C$ es correspon amb $a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$ aleshores $x(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1})$ és del codi i per tant $(a_{n-1}, a_0, \ldots, a_{n-2}) \in C$
- Tot codi cíclic és generat per un polinomi $f \mid x^n - 1$
- Codi de Golay binari:
  - A $\mathbb{F}_2[x]$ el polinomi $x^{23} - 1$ factoritza com:

$$(x+1)\cdot(x^{11}+x^9+x^7+x^6+x^5+x+1)\cdot(x^{11}+x^{10}+x^6+x^5+x^4+x^2+1)$$

  - És el generat per un dels factors de grau 11, és un codi $(23, 12, 7)$
  - El codi estès $(24, 12, 8)$ s'obté afegint un bit de paritat

Codis cíclics

- Isomorfisme d'espais vectorials $\mathbb{F}_q^n \simeq \mathbb{F}_q[x]/(x^n - 1)$
- L'espai de la dreta té una estructura d'anell

Codi cíclic

El subespai donat per un ideal de $\mathbb{F}_q[x]/(x^n - 1)$

- Obs: si $(a_0, a_1 \ldots, a_{n-1}) \in C$ es correspon amb $a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$ aleshores $x(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1})$ és del codi i per tant $(a_{n-1}, a_0, \ldots, a_{n-2}) \in C$
- Tot codi cíclic és generat per un polinomi $f \mid x^n - 1$
- Codi de Golay binari:
  - A $\mathbb{F}_2[x]$ el polinomi $x^{23} - 1$ factoritza com:

$$(x+1)\cdot(x^{11}+x^9+x^7+x^6+x^5+x+1)\cdot(x^{11}+x^{10}+x^6+x^5+x^4+x^2+1)$$

  - És el generat per un dels factors de grau 11, és un codi $(23, 12, 7)$
  - El codi estès $(24, 12, 8)$ s'obté afegint un bit de paritat

Codis cíclics

- Isomorfisme d'espais vectorials $\mathbb{F}_q^n \simeq \mathbb{F}_q[x]/(x^n - 1)$
- L'espai de la dreta té una estructura d'anell

Codi cíclic

El subespai donat per un ideal de $\mathbb{F}_q[x]/(x^n - 1)$

- Obs: si $(a_0, a_1 \ldots, a_{n-1}) \in C$ es correspon amb $a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$ aleshores $x(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1})$ és del codi i per tant $(a_{n-1}, a_0, \ldots, a_{n-2}) \in C$
- Tot codi cíclic és generat per un polinomi $f \mid x^n - 1$
- Codi de Golay binari:
  - A $\mathbb{F}_2[x]$ el polinomi $x^{23} - 1$ factoritza com:

$$(x+1)\cdot(x^{11}+x^9+x^7+x^6+x^5+x+1)\cdot(x^{11}+x^{10}+x^6+x^5+x^4+x^2+1)$$

  - És el generat per un dels factors de grau 11, és un codi $(23, 12, 7)$
  - El codi estès $(24, 12, 8)$ s'obté afegint un bit de paritat

Codis cíclics

- Isomorfisme d'espais vectorials $\mathbb{F}_q^n \simeq \mathbb{F}_q[x]/(x^n - 1)$
- L'espai de la dreta té una estructura d'anell

Codi cíclic

El subespai donat per un ideal de $\mathbb{F}_q[x]/(x^n - 1)$

- Obs: si $(a_0, a_1 \ldots, a_{n-1}) \in C$ es correspon amb $a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$ aleshores $x(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1})$ és del codi i per tant $(a_{n-1}, a_0, \ldots, a_{n-2}) \in C$
- Tot codi cíclic és generat per un polinomi $f \mid x^n - 1$
- Codi de Golay binari:
  - A $\mathbb{F}_2[x]$ el polinomi $x^{23} - 1$ factoritza com:

$$(x+1)\cdot(x^{11}+x^9+x^7+x^6+x^5+x+1)\cdot(x^{11}+x^{10}+x^6+x^5+x^4+x^2+1)$$

  - És el generat per un dels factors de grau 11, és un codi $(23, 12, 7)$
  - El codi estès $(24, 12, 8)$ s'obté afegint un bit de paritat

Codis cíclics

- Isomorfisme d'espais vectorials $\mathbb{F}_q^n \simeq \mathbb{F}_q[x]/(x^n - 1)$
- L'espai de la dreta té una estructura d'anell

Codi cíclic

El subespai donat per un ideal de $\mathbb{F}_q[x]/(x^n - 1)$

- Obs: si $(a_0, a_1 \ldots, a_{n-1}) \in C$ es correspon amb $a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$ aleshores $x(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1})$ és del codi i per tant $(a_{n-1}, a_0, \ldots, a_{n-2}) \in C$
- Tot codi cíclic és generat per un polinomi $f \mid x^n - 1$
- Codi de Golay binari:
  - A $\mathbb{F}_2[x]$ el polinomi $x^{23} - 1$ factoritza com:

$$(x+1)\cdot(x^{11}+x^9+x^7+x^6+x^5+x+1)\cdot(x^{11}+x^{10}+x^6+x^5+x^4+x^2+1)$$

  - És el generat per un dels factors de grau 11, és un codi $(23, 12, 7)$
  - El codi estès $(24, 12, 8)$ s'obté afegint un bit de paritat

Codis cíclics

- Isomorfisme d'espais vectorials $\mathbb{F}_q^n \simeq \mathbb{F}_q[x]/(x^n - 1)$
- L'espai de la dreta té una estructura d'anell

Codi cíclic

El subespai donat per un ideal de $\mathbb{F}_q[x]/(x^n - 1)$

- Obs: si $(a_0, a_1 \ldots, a_{n-1}) \in C$ es correspon amb $a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ aleshores $x(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1})$ és del codi i per tant $(a_{n-1}, a_0, \ldots, a_{n-2}) \in C$
- Tot codi cíclic és generat per un polinomi $f \mid x^n - 1$
- Codi de Golay binari:
  - A $\mathbb{F}_2[x]$ el polinomi $x^{23} - 1$ factoritza com:

    $$(x+1)\cdot(x^{11}+x^9+x^7+x^6+x^5+x+1)\cdot(x^{11}+x^{10}+x^6+x^5+x^4+x^2+1)$$

  - És el generat per un dels factors de grau 11, és un codi $(23, 12, 7)$
  - El codi estès $(24, 12, 8)$ s'obté afegint un bit de paritat

Codis cíclics

- Isomorfisme d'espais vectorials $\mathbb{F}_q^n \simeq \mathbb{F}_q[x]/(x^n - 1)$
- L'espai de la dreta té una estructura d'anell

Codi cíclic

El subespai donat per un ideal de $\mathbb{F}_q[x]/(x^n - 1)$

- Obs: si $(a_0, a_1 \ldots, a_{n-1}) \in C$ es correspon amb $a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ aleshores $x(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1})$ és del codi i per tant $(a_{n-1}, a_0, \ldots, a_{n-2}) \in C$
- Tot codi cíclic és generat per un polinomi $f \mid x^n - 1$
- Codi de Golay binari:
  - A $\mathbb{F}_2[x]$ el polinomi $x^{23} - 1$ factoritza com:

    $$(x+1)\cdot(x^{11}+x^9+x^7+x^6+x^5+x+1)\cdot(x^{11}+x^{10}+x^6+x^5+x^4+x^2+1)$$

  - És el generat per un dels factors de grau 11, és un codi $(23, 12, 7)$
  - El codi estès $(24, 12, 8)$ s'obté afegint un bit de paritat

El reticle de Leech

- El 1967 John Leech es va adonar que l'aixecament del codi de Golay binari a $\mathbb{Z}^{24}$ té forats, i que omplint-los s'obté un reticle Λ_{24} amb el doble de densitat.
- El 1968, Conway va calcular el grup d'automorfismes de Λ_{24} (transformacions ortogonals que deixen Λ_{24} invariant).
  - Va trobar que té cardinal $2^{22} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 11 \cdot 13 \cdot 23$.
  - Entre els seus subgrups hi va descobrir tres grups simples esporàdics nous.
- El reticle E_8 té densitat $\delta(8) = \pi^2/384 \simeq 0.25366950790$
- El reticle de Leech Λ_{24} té densitat $\delta(\Lambda_{24}) = \pi^{12}/12! \simeq 0.001929$
- No és gens evident que aquests reticles donin la densitat òptima...

El reticle de Leech

- El 1967 John Leech es va adonar que l'aixecament del codi de Golay binari a $\mathbb{Z}^{24}$ té forats, i que omplint-los s'obté un reticle Λ_{24} amb el doble de densitat.
- El 1968, Conway va calcular el grup d'automorfismes de Λ_{24} (transformacions ortogonals que deixen Λ_{24} invariant).
  - Va trobar que té cardinal $2^{22} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 11 \cdot 13 \cdot 23$.
  - Entre els seus subgrups hi va descobrir tres grups simples esporàdics nous.
- El reticle E_8 té densitat $\delta(8) = \pi^2/384 \simeq 0.25366950790$
- El reticle de Leech Λ_{24} té densitat $\delta(\Lambda_{24}) = \pi^{12}/12! \simeq 0.001929$
- No és gens evident que aquests reticles donin la densitat òptima...

El reticle de Leech

- El 1967 John Leech es va adonar que l'aixecament del codi de Golay binari a $\mathbb{Z}^{24}$ té forats, i que omplint-los s'obté un reticle Λ_{24} amb el doble de densitat.
- El 1968, Conway va calcular el grup d'automorfismes de Λ_{24} (transformacions ortogonals que deixen Λ_{24} invariant).
  - Va trobar que té cardinal $2^{22} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 11 \cdot 13 \cdot 23$.
  - Entre els seus subgrups hi va descobrir tres grups simples esporàdics nous.
- El reticle E_8 té densitat $\delta(8) = \pi^2/384 \simeq 0.25366950790$
- El reticle de Leech Λ_{24} té densitat $\delta(\Lambda_{24}) = \pi^{12}/12! \simeq 0.001929$
- No és gens evident que aquests reticles donin la densitat òptima...

El reticle de Leech

- El 1967 John Leech es va adonar que l'aixecament del codi de Golay binari a $\mathbb{Z}^{24}$ té forats, i que omplint-los s'obté un reticle Λ_{24} amb el doble de densitat.
- El 1968, Conway va calcular el grup d'automorfismes de Λ_{24} (transformacions ortogonals que deixen Λ_{24} invariant).
  - Va trobar que té cardinal $2^{22} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 11 \cdot 13 \cdot 23$.
  - Entre els seus subgrups hi va descobrir tres grups simples esporàdics nous.
- El reticle E_8 té densitat $\delta(8) = \pi^2/384 \simeq 0.25366950790$
- El reticle de Leech Λ_{24} té densitat $\delta(\Lambda_{24}) = \pi^{12}/12! \simeq 0.001929$
- No és gens evident que aquests reticles donin la densitat òptima...

El reticle de Leech

- El 1967 John Leech es va adonar que l'aixecament del codi de Golay binari a $\mathbb{Z}^{24}$ té forats, i que omplint-los s'obté un reticle Λ_{24} amb el doble de densitat.
- El 1968, Conway va calcular el grup d'automorfismes de Λ_{24} (transformacions ortogonals que deixen Λ_{24} invariant).
  - Va trobar que té cardinal $2^{22} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 11 \cdot 13 \cdot 23$.
  - Entre els seus subgrups hi va descobrir tres grups simples esporàdics nous.
- El reticle E_8 té densitat $\delta(8) = \pi^2/384 \simeq 0.25366950790$
- El reticle de Leech Λ_{24} té densitat $\delta(\Lambda_{24}) = \pi^{12}/12! \simeq 0.001929$
- No és gens evident que aquests reticles donin la densitat òptima...

El reticle de Leech

- El 1967 John Leech es va adonar que l'aixecament del codi de Golay binari a $\mathbb{Z}^{24}$ té forats, i que omplint-los s'obté un reticle Λ_{24} amb el doble de densitat.
- El 1968, Conway va calcular el grup d'automorfismes de Λ_{24} (transformacions ortogonals que deixen Λ_{24} invariant).
  - Va trobar que té cardinal $2^{22} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 11 \cdot 13 \cdot 23$.
  - Entre els seus subgrups hi va descobrir tres grups simples esporàdics nous.
- El reticle E_8 té densitat $\delta(8) = \pi^2/384 \simeq 0.25366950790$
- El reticle de Leech Λ_{24} té densitat $\delta(\Lambda_{24}) = \pi^{12}/12! \simeq 0.001929$
- No és gens evident que aquests reticles donin la densitat òptima...

Maryna Viazovska (Ucraïna, 1984)

- (2017) Provà que E_8 té densitat òptima , i és l'única configuració òptima per $n = 8$.
- Poc després, conjuntament amb H. Cohn, A. Kumar, S. D. Miller i D. Radchenko van provar-ho per Λ_{24}
- Va rebre la Medalla Fields el 2022

Elkies–Cohn

Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot y} f(x) dx$ (transf. Fourier). Si

1. $f(x) \leq 0 \ \forall |x| \geq 1$
2. $\hat{f}(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$

Aleshores $\delta \leq f(0)/\hat{f}(0) \times \mathrm{Vol}(B_n(1/2))$

- Viazovska va trobar una "funció màgica" amb aquestes propietats i per a la qual la fita superior coincidia amb $\delta(E_8)$.
- La va trobar via la teoria de formes modulars.

Maryna Viazovska (Ucraïna, 1984)

- (2017) Provà que E_8 té densitat òptima , i és l'única configuració òptima per $n = 8$.
- Poc després, conjuntament amb H. Cohn, A. Kumar, S. D. Miller i D. Radchenko van provar-ho per Λ_{24}
- Va rebre la Medalla Fields el 2022

Elkies–Cohn

Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot y} f(x) dx$ (transf. Fourier). Si

1. $f(x) \leq 0 \ \forall |x| \geq 1$
2. $\hat{f}(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$

Aleshores $\delta \leq f(0)/\hat{f}(0) \times \mathrm{Vol}(B_n(1/2))$

- Viazovska va trobar una "funció màgica" amb aquestes propietats i per a la qual la fita superior coincidia amb $\delta(E_8)$.
- La va trobar via la teoria de formes modulars.

Maryna Viazovska (Ucraïna, 1984)

- (2017) Provà que E_8 té densitat òptima , i és l'única configuració òptima per $n = 8$.
- Poc després, conjuntament amb H. Cohn, A. Kumar, S. D. Miller i D. Radchenko van provar-ho per Λ_{24}
- Va rebre la Medalla Fields el 2022

Elkies–Cohn

Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot y} f(x) dx$ (transf. Fourier). Si

1. $f(x) \leq 0 \ \forall |x| \geq 1$
2. $\hat{f}(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$

Aleshores $\delta \leq f(0)/\hat{f}(0) \times \mathrm{Vol}(B_n(1/2))$

- Viazovska va trobar una "funció màgica" amb aquestes propietats i per a la qual la fita superior coincidia amb $\delta(E_8)$.
- La va trobar via la teoria de formes modulars.

Maryna Viazovska (Ucraïna, 1984)

- (2017) Provà que E_8 té densitat òptima , i és l'única configuració òptima per $n = 8$.
- Poc després, conjuntament amb H. Cohn, A. Kumar, S. D. Miller i D. Radchenko van provar-ho per Λ_{24}
- Va rebre la Medalla Fields el 2022

Elkies–Cohn

Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot y} f(x) dx$ (transf. Fourier). Si

1. $f(x) \leq 0 \ \forall |x| \geq 1$
2. $\hat{f}(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$

Aleshores $\delta \leq f(0)/\hat{f}(0) \times \mathrm{Vol}(B_n(1/2))$

- Viazovska va trobar una "funció màgica" amb aquestes propietats i per a la qual la fita superior coincidia amb $\delta(E_8)$.
- La va trobar via la teoria de formes modulars.

Maryna Viazovska (Ucraïna, 1984)

- (2017) Provà que E_8 té densitat òptima , i és l'única configuració òptima per $n = 8$.
- Poc després, conjuntament amb H. Cohn, A. Kumar, S. D. Miller i D. Radchenko van provar-ho per Λ_{24}
- Va rebre la Medalla Fields el 2022

Elkies–Cohn

Sigui $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot y} f(x)dx$ (transf. Fourier). Si

1. $f(x) \leq 0\ \forall |x| \geq 1$
2. $\hat{f}(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$

Aleshores $\delta \leq f(0)/\hat{f}(0) \times \mathrm{Vol}(B_n(1/2))$

- Viazovska va trobar una "funció màgica" amb aquestes propietats i per a la qual la fita superior coincidia amb $\delta(E_8)$.
- La va trobar via la teoria de formes modulars.

Maryna Viazovska (Ucraïna, 1984)

- (2017) Provà que E_8 té densitat òptima , i és l'única configuració òptima per $n = 8$.
- Poc després, conjuntament amb H. Cohn, A. Kumar, S. D. Miller i D. Radchenko van provar-ho per Λ_{24}
- Va rebre la Medalla Fields el 2022

Elkies–Cohn

Sigui $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot y} f(x)dx$ (transf. Fourier). Si

1. $f(x) \leq 0 \ \forall |x| \geq 1$
2. $\hat{f}(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$

Aleshores $\delta \leq f(0)/\hat{f}(0) \times \mathrm{Vol}(B_n(1/2))$

- Viazovska va trobar una "funció màgica" amb aquestes propietats i per a la qual la fita superior coincidia amb $\delta(E_8)$.
- La va trobar via la teoria de formes modulars.

Maryna Viazovska (Ucraïna, 1984)

- (2017) Provà que E_8 té densitat òptima , i és l'única configuració òptima per $n = 8$.
- Poc després, conjuntament amb H. Cohn, A. Kumar, S. D. Miller i D. Radchenko van provar-ho per Λ_{24}
- Va rebre la Medalla Fields el 2022

Elkies–Cohn

Sigui $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot y} f(x)dx$ (transf. Fourier). Si

1. $f(x) \leq 0\ \forall |x| \geq 1$
2. $\hat{f}(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$

Aleshores $\delta \leq f(0)/\hat{f}(0) \times \mathrm{Vol}(B_n(1/2))$

- Viazovska va trobar una "funció màgica" amb aquestes propietats i per a la qual la fita superior coincidia amb $\delta(E_8)$.
- La va trobar via la teoria de formes modulars.