Criptografia: les matemàtiques de la informació secreta

Xevi Guitart

Departament de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

Breu introducció històrica

- Criptografia ve del grec krypto (amagar) i grapho (escriure).

Breu introducció històrica

- Criptografia ve del grec krypto (amagar) i grapho (escriure).
- L'objectiu és transmetre missatges de manera privada, que només siguin comprensibles pels destinataris autoritzats i per ningú més.

Breu introducció històrica

- Criptografia ve del grec krypto (amagar) i grapho (escriure).
- L'objectiu és transmetre missatges de manera privada, que només siguin comprensibles pels destinataris autoritzats i per ningú més.
- El missatge es xifra (o encripta) per a amagar el contingut.

Breu introducció històrica

- Criptografia ve del grec krypto (amagar) i grapho (escriure).
- L'objectiu és transmetre missatges de manera privada, que només siguin comprensibles pels destinataris autoritzats i per ningú més.
- El missatge es xifra (o encripta) per a amagar el contingut.
- Durant molt de temps, pràcticament els únics usuaris d'aquestes tècniques eren els militars i els governs.

Breu introducció històrica

- Criptografia ve del grec krypto (amagar) i grapho (escriure).
- L'objectiu és transmetre missatges de manera privada, que només siguin comprensibles pels destinataris autoritzats i per ningú més.
- El missatge es xifra (o encripta) per a amagar el contingut.
- Durant molt de temps, pràcticament els únics usuaris d'aquestes tècniques eren els militars i els governs.
  - Els grecs ja feien servir tècniques de xifrat (segle III aC)

Breu introducció històrica

- Criptografia ve del grec krypto (amagar) i grapho (escriure).
- L'objectiu és transmetre missatges de manera privada, que només siguin comprensibles pels destinataris autoritzats i per ningú més.
- El missatge es xifra (o encripta) per a amagar el contingut.
- Durant molt de temps, pràcticament els únics usuaris d'aquestes tècniques eren els militars i els governs.
  - Els grecs ja feien servir tècniques de xifrat (segle III aC)
  - Juli Cèsar ($\sim$ 45 aC) feia servir un mètode de xifrat

Breu introducció històrica

- Criptografia ve del grec krypto (amagar) i grapho (escriure).
- L'objectiu és transmetre missatges de manera privada, que només siguin comprensibles pels destinataris autoritzats i per ningú més.
- El missatge es xifra (o encripta) per a amagar el contingut.
- Durant molt de temps, pràcticament els únics usuaris d'aquestes tècniques eren els militars i els governs.
  - Els grecs ja feien servir tècniques de xifrat (segle III aC)
  - Juli Cèsar ($\sim$ 45 aC) feia servir un mètode de xifrat
  - El matemàtic àrab Al-Kindi (s. VII d.C.) trencà el xifrat del Cèsar.

Breu introducció històrica

- Criptografia ve del grec krypto (amagar) i grapho (escriure).
- L'objectiu és transmetre missatges de manera privada, que només siguin comprensibles pels destinataris autoritzats i per ningú més.
- El missatge es xifra (o encripta) per a amagar el contingut.
- Durant molt de temps, pràcticament els únics usuaris d'aquestes tècniques eren els militars i els governs.
  - Els grecs ja feien servir tècniques de xifrat (segle III aC)
  - Juli Cèsar ($\sim$ 45 aC) feia servir un mètode de xifrat
  - El matemàtic àrab Al-Kindi (s. VII d.C.) trencà el xifrat del Cèsar.
  - Jugà un paper clau a la 2ª guerra mundial (màquina Enigma).

Breu introducció històrica

- Als anys 70 del segle passat hi ha una revolució en la criptografia:

Breu introducció històrica

- Als anys 70 del segle passat hi ha una revolució en la criptografia:
  - Ús creixent de la informàtica i les comunicacions digitals:
    - ★ demanda de serveis criptogràfics per part de la societat civil
    - ★ entitats financeres i empreses en general

Breu introducció històrica

- Als anys 70 del segle passat hi ha una revolució en la criptografia:
  - Ús creixent de la informàtica i les comunicacions digitals:
    - ★ demanda de serveis criptogràfics per part de la societat civil
    - ★ entitats financeres i empreses en general
  - 1976: invenció de la criptografia de clau pública per Whitfield Diffie i Martin Hellman, matemàtic i enginyer electrònic americans.

Breu introducció històrica

- Als anys 70 del segle passat hi ha una revolució en la criptografia:
  - Ús creixent de la informàtica i les comunicacions digitals:
    - ★ demanda de serveis criptogràfics per part de la societat civil
    - ★ entitats financeres i empreses en general
  - 1976: invenció de la criptografia de clau pública per Whitfield Diffie i Martin Hellman, matemàtic i enginyer electrònic americans.

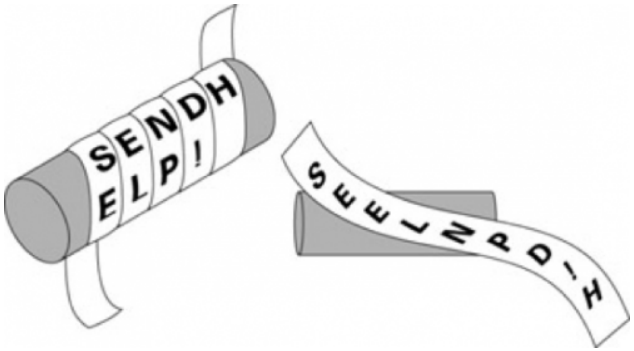
  - 1978: Rivest, Shamir i Adelman inventen el criptosistema RSA
    - ★ Àmpliament utilitzat avui en dia a internet

Alguns xifrats històrics: l'escítal

- Utilitzat pels espartants $\sim$ 400 a.C.

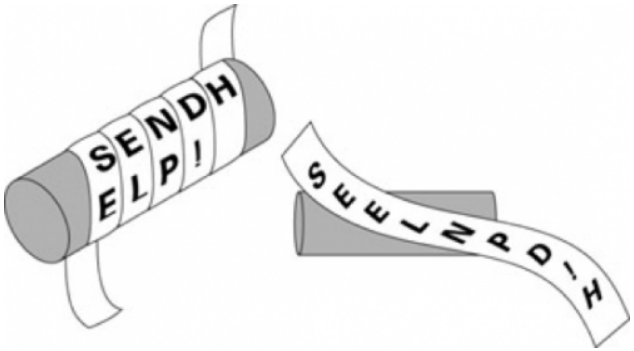
Alguns xifrats històrics: l'escítal

- Utilitzat pels espartants $\sim$ 400 a.C.
- Un bastó on s'hi enrotlla una tira de paper, i s'hi escriu el missatge



Alguns xifrats històrics: l'escítal

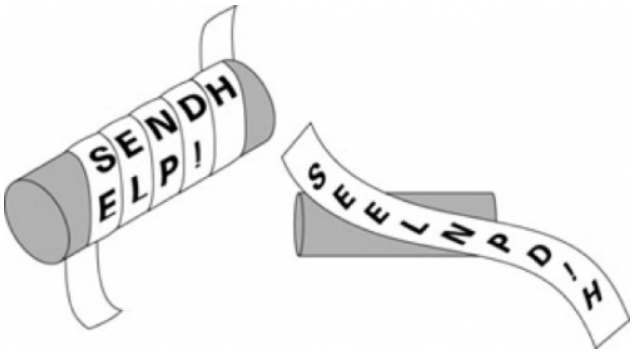
- Utilitzat pels espartants $\sim$ 400 a.C.
- Un bastó on s'hi enrotlla una tira de paper, i s'hi escriu el missatge



- Quan desenrotllem el paper, les lletres queden desordenades (es fa una permutació) i no s'entén el missatge

Alguns xifrats històrics: l'escítal

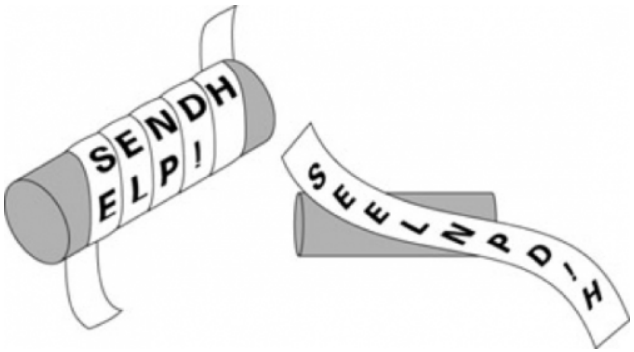
- Utilitzat pels espartants $\sim$ 400 a.C.
- Un bastó on s'hi enrotlla una tira de paper, i s'hi escriu el missatge



- Quan desenrotllem el paper, les lletres queden desordenades (es fa una permutació) i no s'entén el missatge
- Per a desxifrar-lo, l'enrotllem en un bastó...

Alguns xifrats històrics: l'escítal

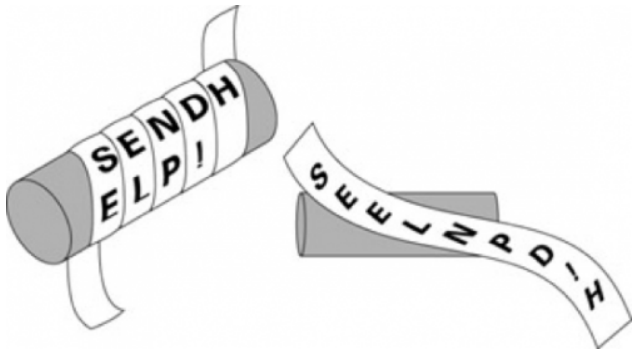
- Utilitzat pels espartants $\sim$ 400 a.C.
- Un bastó on s'hi enrotlla una tira de paper, i s'hi escriu el missatge



- Quan desenrotllem el paper, les lletres queden desordenades (es fa una permutació) i no s'entén el missatge
- Per a desxifrar-lo, l'enrotllem en un bastó...del mateix diàmetre!

Alguns xifrats històrics: l'escítal

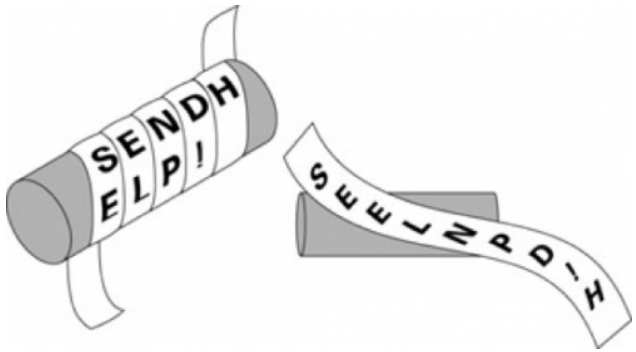
- Utilitzat pels espartants $\sim$ 400 a.C.
- Un bastó on s'hi enrotlla una tira de paper, i s'hi escriu el missatge



- Quan desenrotllem el paper, les lletres queden desordenades (es fa una permutació) i no s'entén el missatge
- Per a desxifrar-lo, l'enrotllem en un bastó...del mateix diàmetre!
- Emissor i receptor han d'haver acordat el diàmetre, la clau secreta

Alguns xifrats històrics: l'escítal

- Utilitzat pels espartants $\sim$ 400 a.C.
- Un bastó on s'hi enrotlla una tira de paper, i s'hi escriu el missatge



- Quan desenrotllem el paper, les lletres queden desordenades (es fa una permutació) i no s'entén el missatge
- Per a desxifrar-lo, l'enrotllem en un bastó...del mateix diàmetre!
- Emissor i receptor han d'haver acordat el diàmetre, la clau secreta
- És un xifrat de permutació

Un altre xifrat de permutació

- Missatge: Ataqueu a les vuit

Un altre xifrat de permutació

- Missatge: Ataqueu a les vuit
- Omplim una graella per files

A	T	A	Q	U
E	U	A	L	E
S	V	U	I	T

Un altre xifrat de permutació

- Missatge: Ataqueu a les vuit
- Omplim una graella per files

A	T	A	Q	U
E	U	A	L	E
S	V	U	I	T

- Llegim per columnes: AESTUVAAUQLIUET

Un altre xifrat de permutació

- Missatge: Ataqueu a les vuit
- Omplim una graella per files

A	T	A	Q	U
E	U	A	L	E
S	V	U	I	T

- Llegim per columnes: AESTUVAAUQLIUET
- Per dexifrar: omplim la graella per columnes i llegim per files

Un altre xifrat de permutació

- Missatge: Ataqueu a les vuit
- Omplim una graella per files

A	T	A	Q	U
E	U	A	L	E
S	V	U	I	T

- Llegim per columnes: AESTUVAAUQLIUET
- Per dexifrar: omplim la graella per columnes i llegim per files
- Quina és ara la clau secreta?

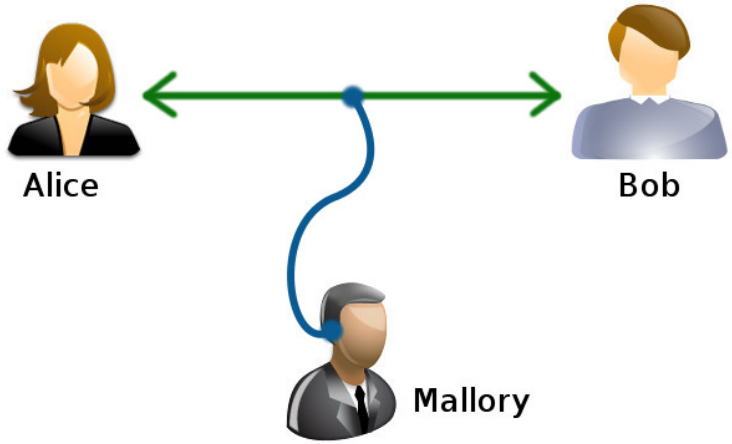
Un altre xifrat de permutació

- Missatge: Ataqueu a les vuit
- Omplim una graella per files

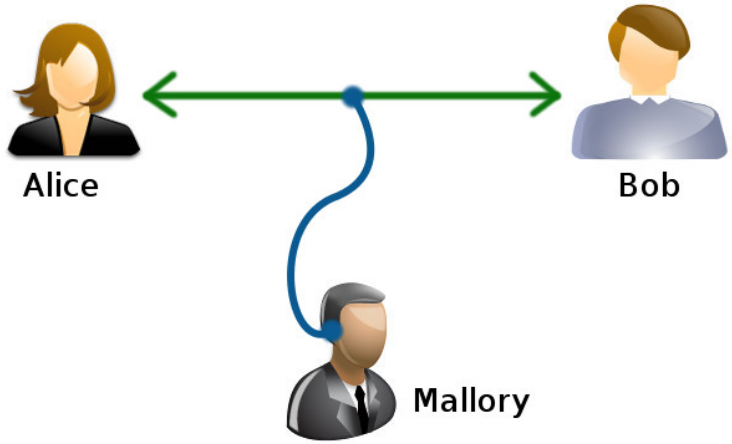
A	T	A	Q	U
E	U	A	L	E
S	V	U	I	T

- Llegim per columnes: AESTUVAAUQLIUET
- Per dexifrar: omplim la graella per columnes i llegim per files
- Quina és ara la clau secreta?
  - És la mida de la graella, en aquest cas 3×5

El xifrat del Cèsar

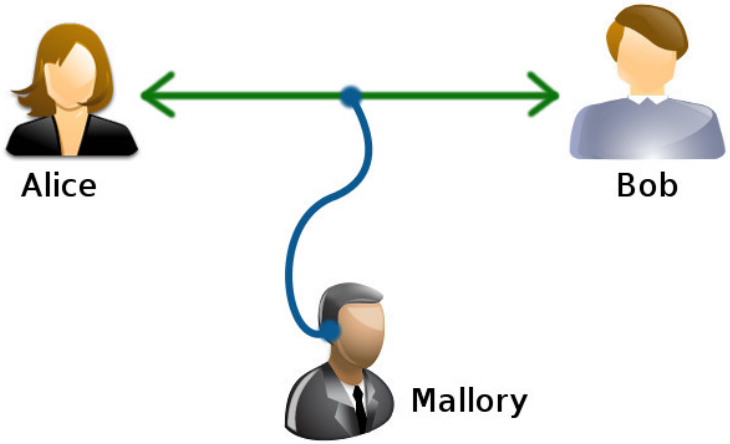


El xifrat del Cèsar



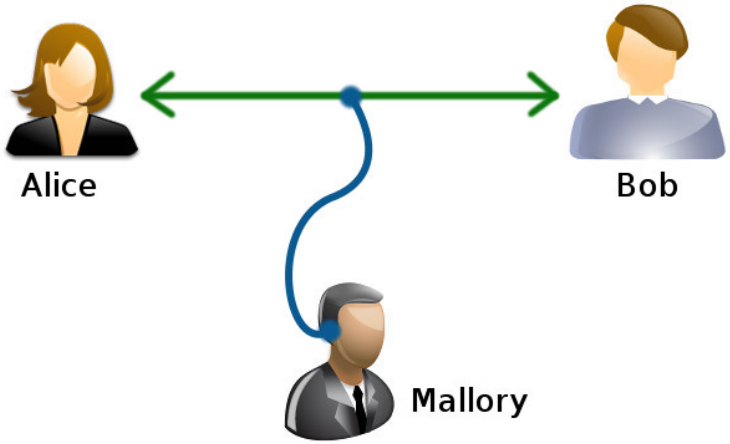
- L'Alice i en Bob es reuneixen prèviament i acorden substituir cada lletra per la que està 3 posicions més endavant a l'alfabet

El xifrat del Cèsar



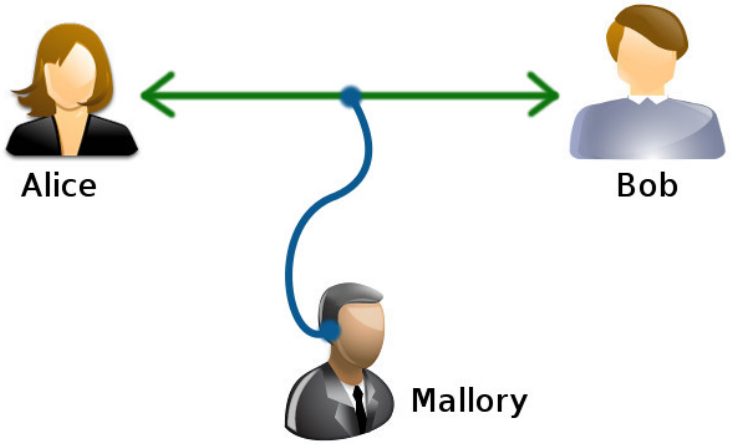
- L'Alice i en Bob es reuneixen prèviament i acorden substituir cada lletra per la que està 3 posicions més endavant a l'alfabet
- Així si el missatge és HOLA, l'Alice el xifra i transmet KROD.

El xifrat del Cèsar



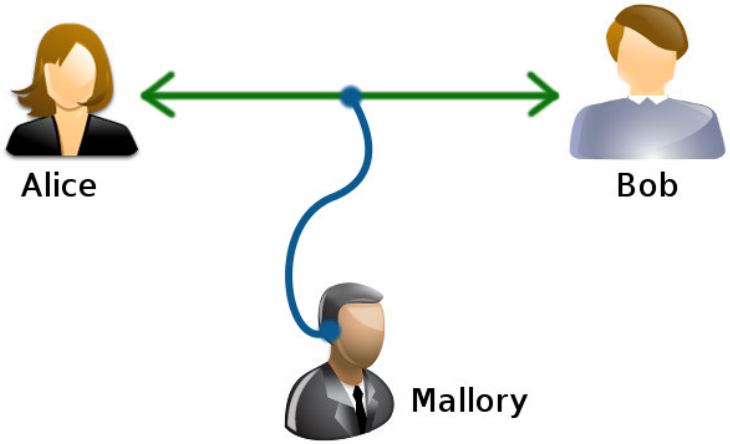
- L'Alice i en Bob es reuneixen prèviament i acorden substituir cada lletra per la que està 3 posicions més endavant a l'alfabet
- Així si el missatge és HOLA, l'Alice el xifra i transmet KROD.
- En Bob rep KROD, i per desxifrar-lo substitueix cada lletra per la que està 3 posicions més enrera a l'alfabet, obtenint HOLA.

El xifrat del Cèsar



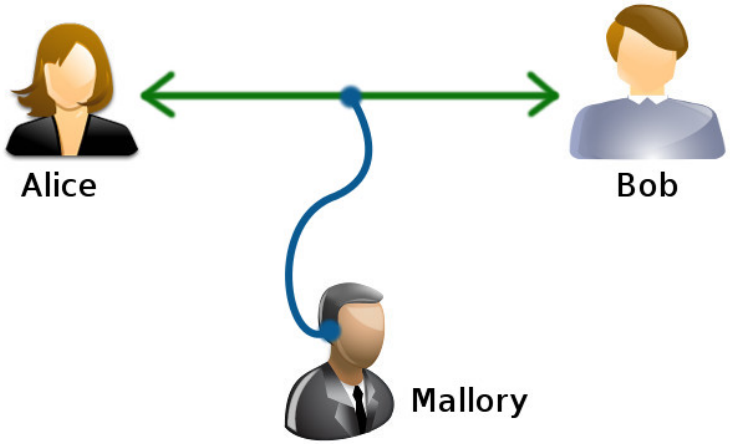
- L'Alice i en Bob es reuneixen prèviament i acorden substituir cada lletra per la que està 3 posicions més endavant a l'alfabet
- Així si el missatge és HOLA, l'Alice el xifra i transmet KROD.
- En Bob rep KROD, i per desxifrar-lo substitueix cada lletra per la que està 3 posicions més enrera a l'alfabet, obtenint HOLA.
- En Mallory intercepta KROD, i no sap el seu significat.

El xifrat del Cèsar



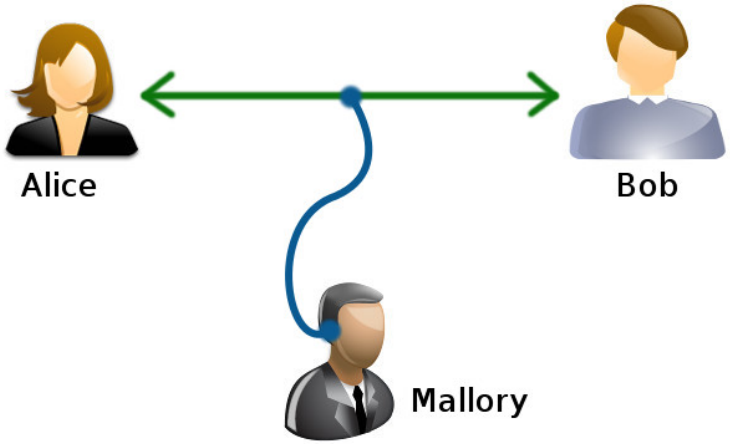
- L'Alice i en Bob es reuneixen prèviament i acorden substituir cada lletra per la que està 3 posicions més endavant a l'alfabet
- Així si el missatge és HOLA, l'Alice el xifra i transmet KROD.
- En Bob rep KROD, i per desxifrar-lo substitueix cada lletra per la que està 3 posicions més enrera a l'alfabet, obtenint HOLA.
- En Mallory intercepta KROD, i no sap el seu significat.
- La clau k és el nombre de posicions que tirem a la dreta.

El xifrat del Cèsar



- L'Alice i en Bob es reuneixen prèviament i acorden substituir cada lletra per la que està 3 posicions més endavant a l'alfabet
- Així si el missatge és HOLA, l'Alice el xifra i transmet KROD.
- En Bob rep KROD, i per desxifrar-lo substitueix cada lletra per la que està 3 posicions més enrera a l'alfabet, obtenint HOLA.
- En Mallory intercepta KROD, i no sap el seu significat.
- La clau k és el nombre de posicions que tirem a la dreta.
- Diuen que aquest sistema, amb $k = 3$, era utilitzat per Juli Cèsar.

El xifrat del Cèsar



- L'Alice i en Bob es reuneixen prèviament i acorden substituir cada lletra per la que està 3 posicions més endavant a l'alfabet
- Així si el missatge és HOLA, l'Alice el xifra i transmet KROD.
- En Bob rep KROD, i per desxifrar-lo substitueix cada lletra per la que està 3 posicions més enrera a l'alfabet, obtenint HOLA.
- En Mallory intercepta KROD, i no sap el seu significat.
- La clau k és el nombre de posicions que tirem a la dreta.
- Diuen que aquest sistema, amb $k = 3$, era utilitzat per Juli Cèsar.
- Aquest és un xifrat de substitució

Xifrat de substitució i aritmètica modular

- L'alfabet català té 26 lletres, identifiquem lletres amb nombres:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Xifrat de substitució i aritmètica modular

- L'alfabet català té 26 lletres, identifiquem lletres amb nombres:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- Podem identificar l'alfabet amb $\{0, 1, 2, \ldots, 25\}$.

Xifrat de substitució i aritmètica modular

- L'alfabet català té 26 lletres, identifiquem lletres amb nombres:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- Podem identificar l'alfabet amb $\{0, 1, 2, \ldots, 25\}$.
- Un missatge és una cadena de nombres: HOLA $\rightarrow$ 7 14 11 0

Xifrat de substitució i aritmètica modular

- L'alfabet català té 26 lletres, identifiquem lletres amb nombres:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- Podem identificar l'alfabet amb $\{0, 1, 2, \ldots, 25\}$.
- Un missatge és una cadena de nombres: HOLA $\rightarrow$ 7 14 11 0
- L'Alice i en Bob acorden una clau secreta, per exemple $d = 20$

Xifrat de substitució i aritmètica modular

- L'alfabet català té 26 lletres, identifiquem lletres amb nombres:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- Podem identificar l'alfabet amb $\{0, 1, 2, \ldots, 25\}$.
- Un missatge és una cadena de nombres: HOLA $\rightarrow$ 7 14 11 0
- L'Alice i en Bob acorden una clau secreta, per exemple $d = 20$
- Per xifrar sumem 20 al nombre associat a cada lletra

Xifrat de substitució i aritmètica modular

- L'alfabet català té 26 lletres, identifiquem lletres amb nombres:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- Podem identificar l'alfabet amb $\{0, 1, 2, \ldots, 25\}$.
- Un missatge és una cadena de nombres: HOLA $\to$ 7 14 11 0
- L'Alice i en Bob acorden una clau secreta, per exemple $d = 20$
- Per xifrar sumem 20 al nombre associat a cada lletra
  - Compte! Si el resultat dóna ≥ 26, hem de restar-li 26

Xifrat de substitució i aritmètica modular

- L'alfabet català té 26 lletres, identifiquem lletres amb nombres:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- Podem identificar l'alfabet amb $\{0, 1, 2, \ldots, 25\}$.
- Un missatge és una cadena de nombres: HOLA $\rightarrow$ 7 14 11 0
- L'Alice i en Bob acorden una clau secreta, per exemple $d = 20$
- Per xifrar sumem 20 al nombre associat a cada lletra
  - Compte! Si el resultat dóna ≥ 26, hem de restar-li 26
  - 7 14 11 0 $\rightarrow$ 1 8 5 20

Xifrat de substitució i aritmètica modular

- L'alfabet català té 26 lletres, identifiquem lletres amb nombres:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- Podem identificar l'alfabet amb $\{0, 1, 2, \ldots, 25\}$.
- Un missatge és una cadena de nombres: HOLA $\rightarrow$ 7 14 11 0
- L'Alice i en Bob acorden una clau secreta, per exemple $d = 20$
- Per xifrar sumem 20 al nombre associat a cada lletra
  - Compte! Si el resultat dóna ≥ 26, hem de restar-li 26
  - 7 14 11 0 $\rightarrow$ 1 8 5 20
  - HOLA $\rightarrow$ BIFU

Xifrat de substitució i aritmètica modular

- L'alfabet català té 26 lletres, identifiquem lletres amb nombres:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- Podem identificar l'alfabet amb $\{0, 1, 2, \ldots, 25\}$.
- Un missatge és una cadena de nombres: HOLA $\to$ 7 14 11 0
- L'Alice i en Bob acorden una clau secreta, per exemple $d = 20$
- Per xifrar sumem 20 al nombre associat a cada lletra
  - Compte! Si el resultat dóna ≥ 26, hem de restar-li 26
  - 7 14 11 0 $\to$ 1 8 5 20
  - HOLA $\to$ BIFU
- Per desxifrar, a cada lletra li hem de restar 20.

Xifrat de substitució i aritmètica modular

- L'alfabet català té 26 lletres, identifiquem lletres amb nombres:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- Podem identificar l'alfabet amb $\{0, 1, 2, \ldots, 25\}$.
- Un missatge és una cadena de nombres: HOLA $\rightarrow$ 7 14 11 0
- L'Alice i en Bob acorden una clau secreta, per exemple $d = 20$
- Per xifrar sumem 20 al nombre associat a cada lletra
  - Compte! Si el resultat dóna ≥ 26, hem de restar-li 26
  - 7 14 11 0 $\rightarrow$ 1 8 5 20
  - HOLA $\rightarrow$ BIFU
- Per desxifrar, a cada lletra li hem de restar 20.
  - Compte! Si el resultat dóna < 0, aleshores li hem de sumar 26

Xifrat de substitució i aritmètica modular

- L'alfabet català té 26 lletres, identifiquem lletres amb nombres:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- Podem identificar l'alfabet amb $\{0, 1, 2, \ldots, 25\}$.
- Un missatge és una cadena de nombres: HOLA $\rightarrow$ 7 14 11 0
- L'Alice i en Bob acorden una clau secreta, per exemple $d = 20$
- Per xifrar sumem 20 al nombre associat a cada lletra
  - Compte! Si el resultat dóna ≥ 26, hem de restar-li 26
  - 7 14 11 0 $\rightarrow$ 1 8 5 20
  - HOLA $\rightarrow$ BIFU
- Per desxifrar, a cada lletra li hem de restar 20.
  - Compte! Si el resultat dóna < 0, aleshores li hem de sumar 26
- A aquesta manera de sumar i restar, en què volem portar els resultats a un nombre entre 0 i 25, se li diu aritmètica mòdul 26

Xifrat de substitució i aritmètica modular

- L'alfabet català té 26 lletres, identifiquem lletres amb nombres:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- Podem identificar l'alfabet amb $\{0, 1, 2, \ldots, 25\}$.
- Un missatge és una cadena de nombres: HOLA $\rightarrow$ 7 14 11 0
- L'Alice i en Bob acorden una clau secreta, per exemple $d = 20$
- Per xifrar sumem 20 al nombre associat a cada lletra
  - Compte! Si el resultat dóna ≥ 26, hem de restar-li 26
  - 7 14 11 0 $\rightarrow$ 1 8 5 20
  - HOLA $\rightarrow$ BIFU
- Per desxifrar, a cada lletra li hem de restar 20.
  - Compte! Si el resultat dóna < 0, aleshores li hem de sumar 26
- A aquesta manera de sumar i restar, en què volem portar els resultats a un nombre entre 0 i 25, se li diu aritmètica mòdul 26
- No és res nou per a nosaltres:

Xifrat de substitució i aritmètica modular

- L'alfabet català té 26 lletres, identifiquem lletres amb nombres:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- Podem identificar l'alfabet amb $\{0, 1, 2, \ldots, 25\}$.
- Un missatge és una cadena de nombres: HOLA $\to$ 7 14 11 0
- L'Alice i en Bob acorden una clau secreta, per exemple $d = 20$
- Per xifrar sumem 20 al nombre associat a cada lletra
  - Compte! Si el resultat dóna ≥ 26, hem de restar-li 26
  - 7 14 11 0 $\to$ 1 8 5 20
  - HOLA $\to$ BIFU
- Per desxifrar, a cada lletra li hem de restar 20.
  - Compte! Si el resultat dóna < 0, aleshores li hem de sumar 26
- A aquesta manera de sumar i restar, en què volem portar els resultats a un nombre entre 0 i 25, se li diu aritmètica mòdul 26
- No és res nou per a nosaltres:
  - Quan sumem o restem hores ho fem mòdul 12

Xifrat de substitució i aritmètica modular

- L'alfabet català té 26 lletres, identifiquem lletres amb nombres:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- Podem identificar l'alfabet amb $\{0, 1, 2, \ldots, 25\}$.
- Un missatge és una cadena de nombres: HOLA $\to$ 7 14 11 0
- L'Alice i en Bob acorden una clau secreta, per exemple $d = 20$
- Per xifrar sumem 20 al nombre associat a cada lletra
  - Compte! Si el resultat dóna ≥ 26, hem de restar-li 26
  - 7 14 11 0 $\to$ 1 8 5 20
  - HOLA $\to$ BIFU
- Per desxifrar, a cada lletra li hem de restar 20.
  - Compte! Si el resultat dóna < 0, aleshores li hem de sumar 26
- A aquesta manera de sumar i restar, en què volem portar els resultats a un nombre entre 0 i 25, se li diu aritmètica mòdul 26
- No és res nou per a nosaltres:
  - Quan sumem o restem hores ho fem mòdul 12
  - Quan sumem o restem angles, ho fem mòdul 360

Com podem trencar el xifrat del Cèsar?

Com podem trencar el xifrat del Cèsar?

1. Força bruta: hi ha 26 claus possibles, les podem provar totes...

Com podem trencar el xifrat del Cèsar?

1. Força bruta: hi ha 26 claus possibles, les podem provar totes...
2. Hi ha una manera millor, que és la que va descobrir Al-Kindi

Com podem trencar el xifrat del Cèsar?

1. Força bruta: hi ha 26 claus possibles, les podem provar totes...
2. Hi ha una manera millor, que és la que va descobrir Al-Kindi
   - Interceptem el missatge NGNDHRH N YRF QRH QRY IRFCER

Com podem trencar el xifrat del Cèsar?

1. Força bruta: hi ha 26 claus possibles, les podem provar totes...
2. Hi ha una manera millor, que és la que va descobrir Al-Kindi
   - Interceptem el missatge NGNDHRH N YRF QRH QRY IRFCER
   - No totes les lletres són igual de freqüents

Com podem trencar el xifrat del Cèsar?

1. Força bruta: hi ha 26 claus possibles, les podem provar totes...
2. Hi ha una manera millor, que és la que va descobrir Al-Kindi
   - Interceptem el missatge NGNDHRH N YRF QRH QRY IRFCER
   - No totes les lletres són igual de freqüents
   - En català la més freqüènt és la *E*.

Com podem trencar el xifrat del Cèsar?

1. Força bruta: hi ha 26 claus possibles, les podem provar totes...
2. Hi ha una manera millor, que és la que va descobrir Al-Kindi
   - Interceptem el missatge NGNDHRH N YRF QRH QRY IRFCER
   - No totes les lletres són igual de freqüents
   - En català la més freqüènt és la *E*.
   - En un text xifrat llarg, és probable que la lletra que aparegui més cops sigui la que es correspon a la *E*.

Com podem trencar el xifrat del Cèsar?

1. Força bruta: hi ha 26 claus possibles, les podem provar totes...
2. Hi ha una manera millor, que és la que va descobrir Al-Kindi
   - Interceptem el missatge NGNDHRH N YRF QRH QRY IRFCER
   - No totes les lletres són igual de freqüents
   - En català la més freqüènt és la E.
   - En un text xifrat llarg, és probable que la lletra que aparegui més cops sigui la que es correspon a la E.
   - R apareix 6 cops, podem intuir que la $E = 4$ s'ha xifrat com $R = 17$.

Com podem trencar el xifrat del Cèsar?

1. Força bruta: hi ha 26 claus possibles, les podem provar totes...
2. Hi ha una manera millor, que és la que va descobrir Al-Kindi
   - Interceptem el missatge NGNDHRH N YRF QRH QRY IRFCER
   - No totes les lletres són igual de freqüents
   - En català la més freqüènt és la E.
   - En un text xifrat llarg, és probable que la lletra que aparegui més cops sigui la que es correspon a la E.
   - R apareix 6 cops, podem intuir que la $E = 4$ s'ha xifrat com $R = 17$.
   - Si desxifrem amb la clau $17 - 4 = 13 = N$ obtenim:

     ATAQUEU A LES DEU DEL VESPRE

Com podem trencar el xifrat del Cèsar?

1. Força bruta: hi ha 26 claus possibles, les podem provar totes...
2. Hi ha una manera millor, que és la que va descobrir Al-Kindi
   - Interceptem el missatge NGNDHRH N YRF QRH QRY IRFCER
   - No totes les lletres són igual de freqüents
   - En català la més freqüènt és la E.
   - En un text xifrat llarg, és probable que la lletra que aparegui més cops sigui la que es correspon a la E.
   - R apareix 6 cops, podem intuir que la $E = 4$ s'ha xifrat com $R = 17$.
   - Si desxifrem amb la clau $17 - 4 = 13 = N$ obtenim:

     ATAQUEU A LES DEU DEL VESPRE

Com podem trencar el xifrat del Cèsar?

1. Força bruta: hi ha 26 claus possibles, les podem provar totes...
2. Hi ha una manera millor, que és la que va descobrir Al-Kindi
   - Interceptem el missatge NGNDHRH N YRF QRH QRY IRFCER
   - No totes les lletres són igual de freqüents
   - En català la més freqüènt és la E.
   - En un text xifrat llarg, és probable que la lletra que aparegui més cops sigui la que es correspon a la E.
   - R apareix 6 cops, podem intuir que la $E = 4$ s'ha xifrat com $R = 17$.
   - Si desxifrem amb la clau $17 - 4 = 13 = N$ obtenim:

     ATAQUEU A LES DEU DEL VESPRE

- Aquests atacs es poden solucionar, amb els anomenats sistemes de subsitució polialfabètica. Ara en veurem un exemple.

Com podem trencar el xifrat del Cèsar?

1. Força bruta: hi ha 26 claus possibles, les podem provar totes...
2. Hi ha una manera millor, que és la que va descobrir Al-Kindi
   - Interceptem el missatge NGNDHRH N YRF QRH QRY IRFCER
   - No totes les lletres són igual de freqüents
   - En català la més freqüènt és la E.
   - En un text xifrat llarg, és probable que la lletra que aparegui més cops sigui la que es correspon a la E.
   - R apareix 6 cops, podem intuir que la $E = 4$ s'ha xifrat com $R = 17$.
   - Si desxifrem amb la clau $17 - 4 = 13 = N$ obtenim:

     ATAQUEU A LES DEU DEL VESPRE

- Aquests atacs es poden solucionar, amb els anomenats sistemes de subsitució polialfabètica. Ara en veurem un exemple.
- Encara hi ha un problema: cal acordar una clau prèviament...

El xifrat de Vigenere

- Com la substitució simple, però utilitzem més d'una clau

El xifrat de Vigenere

- Com la substitució simple, però utilitzem més d'una clau
- Exemple: clau 2 14 18 0 (paraula clau: "COSA")

El xifrat de Vigenere

- Com la substitució simple, però utilitzem més d'una clau
- Exemple: clau 2 14 18 0 (paraula clau: "COSA")
- Missatge: Ataqueu a les dotze

text clar	0	19	0	16	20	4	20	0	11	4	18	4	14	19	25	...
clau repetida	2	14	18	0	2	14	18	0	2	14	18	0	2	14	18	...
text xifrat	2	7	18	16	22	18	12	0	13	18	10	4	16	7	17	...

El xifrat de Vigenere

- Com la substitució simple, però utilitzem més d'una clau
- Exemple: clau 2 14 18 0 (paraula clau: "COSA")
- Missatge: Ataqueu a les dotze

text clar	0	19	0	16	20	4	20	0	11	4	18	4	14	19	25	
clau repetida	2	14	18	0	2	14	18	0	2	14	18	0	2	14	18	
text xifrat	2	7	18	16	22	18	12	0	13	18	10	4	16	7	17	

- Missatge xifrat: chsqwsmanskdqhre

El xifrat de Vigenere

- Com la substitució simple, però utilitzem més d'una clau
- Exemple: clau 2 14 18 0 (paraula clau: "COSA")
- Missatge: Ataqueu a les dotze

text clar	0	19	0	16	20	4	20	0	11	4	18	4	14	19	25	...
clau repetida	2	14	18	0	2	14	18	0	2	14	18	0	2	14	18	...
text xifrat	2	7	18	16	22	18	12	0	13	18	10	4	16	7	17	...

- Missatge xifrat: chsqwsmanskdqhre
- Dificulta l'atac per força bruta: ara hi ha $26^n = 456\,976$ possibles claus, on n és la longitud de la clau.

El xifrat de Vigenere

- Com la substitució simple, però utilitzem més d'una clau
- Exemple: clau 2 14 18 0 (paraula clau: "COSA")
- Missatge: Ataqueu a les dotze

text clar	0	19	0	16	20	4	20	0	11	4	18	4	14	19	25
clau repetida	2	14	18	0	2	14	18	0	2	14	18	0	2	14	18
text xifrat	2	7	18	16	22	18	12	0	13	18	10	4	16	7	17

- Missatge xifrat: chsqwsmanskdqhre
- Dificulta l'atac per força bruta: ara hi ha $26^n = 456\,976$ possibles claus, on n és la longitud de la clau.
- Dificulta l'anàlisi de freqüència: la primera *A* es xifra sumant 2, i la segona *A* es xifra sumant 18.

El xifrat de Vigenere

- Com la substitució simple, però utilitzem més d'una clau
- Exemple: clau 2 14 18 0 (paraula clau: "COSA")
- Missatge: Ataqueu a les dotze

text clar	0	19	0	16	20	4	20	0	11	4	18	4	14	19	25
clau repetida	2	14	18	0	2	14	18	0	2	14	18	0	2	14	18
text xifrat	2	7	18	16	22	18	12	0	13	18	10	4	16	7	17

- Missatge xifrat: chsqwsmanskdqhre
- Dificulta l'atac per força bruta: ara hi ha $26^n = 456\,976$ possibles claus, on n és la longitud de la clau.
- Dificulta l'anàlisi de freqüència: la primera *A* es xifra sumant 2, i la segona *A* es xifra sumant 18.
- Encara hi ha un problema: Cal acordar una clau prèviament.

Criptosistemes de clau secreta

Fenomen general

Com més llarga és la clau, més segur és el criptosistema.

Criptosistemes de clau secreta

Fenomen general

Com més llarga és la clau, més segur és el criptosistema.

- La màquina Enigma, o altres màquines de rotors, utilitzades durant la segona guerra mundial, eren dispositius mecànics que realitzaven substitució polialfabètica de període molt llarg.

Criptosistemes de clau secreta

- Avui en dia en comunicacions digitals
  - criptosistemes de clau secreta (combinen substitució i permutació)
  - AES: Advanced Encryption Standard (utilitzat a internet)

Criptosistemes de clau secreta

- Avui en dia en comunicacions digitals
  - criptosistemes de clau secreta (combinen substitució i permutació)
  - AES: Advanced Encryption Standard (utilitzat a internet)
- Com es fa per a compartir de manera segura la clau secreta?

Criptosistemes de clau secreta

- Avui en dia en comunicacions digitals
  - criptosistemes de clau secreta (combinen substitució i permutació)
  - AES: Advanced Encryption Standard (utilitzat a internet)
- Com es fa per a compartir de manera segura la clau secreta?
  - Aquí és on entren en joc els criptosistemes de clau pública, descoberts el 1976 per Diffie–Helman.

Criptosistemes de clau secreta

- Avui en dia en comunicacions digitals
  - criptosistemes de clau secreta (combinen substitució i permutació)
  - AES: Advanced Encryption Standard (utilitzat a internet)
- Com es fa per a compartir de manera segura la clau secreta?
  - Aquí és on entren en joc els criptosistemes de clau pública, descoberts el 1976 per Diffie–Helman.
  - Veurem el criptosistema RSA, el més utilitzat avui en dia

El criptosistema RSA

- Idea: hi ha dues claus, una per a xifrar i l'altra per a desxifrar
  - La clau per a xifrar la sap tothom, és pública
  - La clau per a desxifrar, només la sap qui rep el missatge

El criptosistema RSA

- Idea: hi ha dues claus, una per a xifrar i l'altra per a desxifrar
  - La clau per a xifrar la sap tothom, és pública
  - La clau per a desxifrar, només la sap qui rep el missatge
- Aritmètica mòdul $N =$ el producte de dos primers molt grans

El criptosistema RSA

- Idea: hi ha dues claus, una per a xifrar i l'altra per a desxifrar
  - La clau per a xifrar la sap tothom, és pública
  - La clau per a desxifrar, només la sap qui rep el missatge
- Aritmètica mòdul $N =$ el producte de dos primers molt grans
  - un nombre és primer si només és divisible per 1 i per ell mateix
  - $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$ són primers, però $4, 6, 8, 9, 10, 12, \ldots$ no ho són

El criptosistema RSA

- Idea: hi ha dues claus, una per a xifrar i l'altra per a desxifrar
  - La clau per a xifrar la sap tothom, és pública
  - La clau per a desxifrar, només la sap qui rep el missatge
- Aritmètica mòdul $N =$ el producte de dos primers molt grans
  - un nombre és primer si només és divisible per 1 i per ell mateix
  - $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$ són primers, però $4, 6, 8, 9, 10, 12, \ldots$ no ho són
  - Quants nombres primers hi ha?

El criptosistema RSA

- Idea: hi ha dues claus, una per a xifrar i l'altra per a desxifrar
  - La clau per a xifrar la sap tothom, és pública
  - La clau per a desxifrar, només la sap qui rep el missatge
- Aritmètica mòdul $N =$ el producte de dos primers molt grans
  - un nombre és primer si només és divisible per 1 i per ell mateix
  - $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$ són primers, però $4, 6, 8, 9, 10, 12, \ldots$ no ho són
  - Quants nombres primers hi ha? N'hi ha infinits!

El criptosistema RSA

- Idea: hi ha dues claus, una per a xifrar i l'altra per a desxifrar
  - La clau per a xifrar la sap tothom, és pública
  - La clau per a desxifrar, només la sap qui rep el missatge
- Aritmètica mòdul $N =$ el producte de dos primers molt grans
  - un nombre és primer si només és divisible per 1 i per ell mateix
  - $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$ són primers, però $4, 6, 8, 9, 10, 12, \ldots$ no ho són
  - Quants nombres primers hi ha? N'hi ha infinits!
  - 123532455399999998155415145 6773 és un primer de 30 xifres

El criptosistema RSA

- Idea: hi ha dues claus, una per a xifrar i l'altra per a desxifrar
  - La clau per a xifrar la sap tothom, és pública
  - La clau per a desxifrar, només la sap qui rep el missatge
- Aritmètica mòdul $N =$ el producte de dos primers molt grans
  - un nombre és primer si només és divisible per 1 i per ell mateix
  - $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$ són primers, però $4, 6, 8, 9, 10, 12, \ldots$ no ho són
  - Quants nombres primers hi ha? N'hi ha infinits!
  - 123532455399999998155415145 6773 és un primer de 30 xifres
- Per al sistema RSA cal:
  - Escollir dos primers molt grans: p i q
  - Calcular $N = p \cdot q$
  - Fer tots els càlculs amb aritmètica mòdul N

El criptosistema RSA

- Idea: hi ha dues claus, una per a xifrar i l'altra per a desxifrar
  - La clau per a xifrar la sap tothom, és pública
  - La clau per a desxifrar, només la sap qui rep el missatge
- Aritmètica mòdul $N =$ el producte de dos primers molt grans
  - un nombre és primer si només és divisible per 1 i per ell mateix
  - $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$ són primers, però $4, 6, 8, 9, 10, 12, \ldots$ no ho són
  - Quants nombres primers hi ha? N'hi ha infinits!
  - 1235324553999999981554151456773 és un primer de 30 xifres
- Per al sistema RSA cal:
  - Escollir dos primers molt grans: p i q
  - Calcular $N = p \cdot q$
  - Fer tots els càlculs amb aritmètica mòdul N
- Farem un exemple de joguina amb $p = 5$, $q = 11$, $N = 55$

El criptosistema RSA: un exemple de joguina

- Alice vol enviar un missatge a Bob. Aleshores Bob fa el següent:

El criptosistema RSA: un exemple de joguina

- Alice vol enviar un missatge a Bob. Aleshores Bob fa el següent:
  - Pren un producte de dos primers, per exemple $N = 5 \cdot 11 = 55$.

El criptosistema RSA: un exemple de joguina

- Alice vol enviar un missatge a Bob. Aleshores Bob fa el següent:
  - Pren un producte de dos primers, per exemple $N = 5 \cdot 11 = 55$.
  - Fa públic el nombre 55, per ex. posant-lo a la seva web.

El criptosistema RSA: un exemple de joguina

- Alice vol enviar un missatge a Bob. Aleshores Bob fa el següent:
  - Pren un producte de dos primers, per exemple $N = 5 \cdot 11 = 55$.
  - Fa públic el nombre 55, per ex. posant-lo a la seva web.
- L'Alice veu que la clau pública d'en Bob és $N = 55$.

El criptosistema RSA: un exemple de joguina

- Alice vol enviar un missatge a Bob. Aleshores Bob fa el següent:
  - Pren un producte de dos primers, per exemple $N = 5 \cdot 11 = 55$.
  - Fa públic el nombre 55, per ex. posant-lo a la seva web.
- L'Alice veu que la clau pública d'en Bob és $N = 55$.
  - Un missatge són nombres mòdul 55, és a dir nombres entre 0 i 54.

El criptosistema RSA: un exemple de joguina

- Alice vol enviar un missatge a Bob. Aleshores Bob fa el següent:
  - Pren un producte de dos primers, per exemple $N = 5 \cdot 11 = 55$.
  - Fa públic el nombre 55, per ex. posant-lo a la seva web.
- L'Alice veu que la clau pública d'en Bob és $N = 55$.
  - Un missatge són nombres mòdul 55, és a dir nombres entre 0 i 54.
  - Suposem que el missatge és $m = 6$.

El criptosistema RSA: un exemple de joguina

- Alice vol enviar un missatge a Bob. Aleshores Bob fa el següent:
  - Pren un producte de dos primers, per exemple $N = 5 \cdot 11 = 55$.
  - Fa públic el nombre 55, per ex. posant-lo a la seva web.
- L'Alice veu que la clau pública d'en Bob és $N = 55$.
  - Un missatge són nombres mòdul 55, és a dir nombres entre 0 i 54.
  - Suposem que el missatge és $m = 6$.
  - En comptes d'enviar m, enviem $m^3 \pmod{55}$. És a dir $6^3 = 216$, restant 55 tants cops com faci falta per fer-lo caure entre 0 i 54.

El criptosistema RSA: un exemple de joguina

- Alice vol enviar un missatge a Bob. Aleshores Bob fa el següent:
  - Pren un producte de dos primers, per exemple $N = 5 \cdot 11 = 55$.
  - Fa públic el nombre 55, per ex. posant-lo a la seva web.
- L'Alice veu que la clau pública d'en Bob és $N = 55$.
  - Un missatge són nombres mòdul 55, és a dir nombres entre 0 i 54.
  - Suposem que el missatge és $m = 6$.
  - En comptes d'enviar m, enviem $m^3 \pmod{55}$. És a dir $6^3 = 216$, restant 55 tants cops com faci falta per fer-lo caure entre 0 i 54.
  - Resulta que $216 = 3 \cdot 55 + 51 \rightsquigarrow$ envia $c = 51$.

El criptosistema RSA: un exemple de joguina

- Alice vol enviar un missatge a Bob. Aleshores Bob fa el següent:
  - Pren un producte de dos primers, per exemple $N = 5 \cdot 11 = 55$.
  - Fa públic el nombre 55, per ex. posant-lo a la seva web.
- L'Alice veu que la clau pública d'en Bob és $N = 55$.
  - Un missatge són nombres mòdul 55, és a dir nombres entre 0 i 54.
  - Suposem que el missatge és $m = 6$.
  - En comptes d'enviar m, enviem $m^3 \pmod{55}$. És a dir $6^3 = 216$, restant 55 tants cops com faci falta per fer-lo caure entre 0 i 54.
  - Resulta que $216 = 3 \cdot 55 + 51 \rightsquigarrow$ envia $c = 51$.
- Bob rep $c = 51$. Per desxifrar-ho, ha de fer l'arrel cúbica mod 55.

El criptosistema RSA: un exemple de joguina

- Alice vol enviar un missatge a Bob. Aleshores Bob fa el següent:
  - Pren un producte de dos primers, per exemple $N = 5 \cdot 11 = 55$.
  - Fa públic el nombre 55, per ex. posant-lo a la seva web.
- L'Alice veu que la clau pública d'en Bob és $N = 55$.
  - Un missatge són nombres mòdul 55, és a dir nombres entre 0 i 54.
  - Suposem que el missatge és $m = 6$.
  - En comptes d'enviar m, enviem $m^3 \pmod{55}$. És a dir $6^3 = 216$, restant 55 tants cops com faci falta per fer-lo caure entre 0 i 54.
  - Resulta que $216 = 3 \cdot 55 + 51 \rightsquigarrow$ envia $c = 51$.
- Bob rep $c = 51$. Per desxifrar-ho, ha de fer l'arrel cúbica mod 55.
  - Resulta que en aritmètica modular, es pot calcular l'arrel cúbica elevant a un altre nombre. Pel cas de $N = 55$, cal elevar a $d = 27$.

El criptosistema RSA: un exemple de joguina

- Alice vol enviar un missatge a Bob. Aleshores Bob fa el següent:
  - Pren un producte de dos primers, per exemple $N = 5 \cdot 11 = 55$.
  - Fa públic el nombre 55, per ex. posant-lo a la seva web.
- L'Alice veu que la clau pública d'en Bob és $N = 55$.
  - Un missatge són nombres mòdul 55, és a dir nombres entre 0 i 54.
  - Suposem que el missatge és $m = 6$.
  - En comptes d'enviar m, enviem $m^3 \pmod{55}$. És a dir $6^3 = 216$, restant 55 tants cops com faci falta per fer-lo caure entre 0 i 54.
  - Resulta que $216 = 3 \cdot 55 + 51 \rightsquigarrow$ envia $c = 51$.
- Bob rep $c = 51$. Per desxifrar-ho, ha de fer l'arrel cúbica mod 55.
  - Resulta que en aritmètica modular, es pot calcular l'arrel cúbica elevant a un altre nombre. Pel cas de $N = 55$, cal elevar a $d = 27$.
  - Si fem 51^{27} i restem múltiples de 55 fins a caure entre 0 i 54 obtenim 6, que és el missatge original.

El criptosistema RSA: un exemple de joguina

- Alice vol enviar un missatge a Bob. Aleshores Bob fa el següent:
  - Pren un producte de dos primers, per exemple $N = 5 \cdot 11 = 55$.
  - Fa públic el nombre 55, per ex. posant-lo a la seva web.
- L'Alice veu que la clau pública d'en Bob és $N = 55$.
  - Un missatge són nombres mòdul 55, és a dir nombres entre 0 i 54.
  - Suposem que el missatge és $m = 6$.
  - En comptes d'enviar m, enviem $m^3 \pmod{55}$. És a dir $6^3 = 216$, restant 55 tants cops com faci falta per fer-lo caure entre 0 i 54.
  - Resulta que $216 = 3 \cdot 55 + 51 \rightsquigarrow$ envia $c = 51$.
- Bob rep $c = 51$. Per desxifrar-ho, ha de fer l'arrel cúbica mod 55.
  - Resulta que en aritmètica modular, es pot calcular l'arrel cúbica elevant a un altre nombre. Pel cas de $N = 55$, cal elevar a $d = 27$.
  - Si fem 51^{27} i restem múltiples de 55 fins a caure entre 0 i 54 obtenim 6, que és el missatge original.
- Per què això és segur?

El criptosistema RSA: un exemple de joguina

- Alice vol enviar un missatge a Bob. Aleshores Bob fa el següent:
  - Pren un producte de dos primers, per exemple $N = 5 \cdot 11 = 55$.
  - Fa públic el nombre 55, per ex. posant-lo a la seva web.
- L'Alice veu que la clau pública d'en Bob és $N = 55$.
  - Un missatge són nombres mòdul 55, és a dir nombres entre 0 i 54.
  - Suposem que el missatge és $m = 6$.
  - En comptes d'enviar m, enviem $m^3 \pmod{55}$. És a dir $6^3 = 216$, restant 55 tants cops com faci falta per fer-lo caure entre 0 i 54.
  - Resulta que $216 = 3 \cdot 55 + 51 \rightsquigarrow$ envia $c = 51$.
- Bob rep $c = 51$. Per desxifrar-ho, ha de fer l'arrel cúbica mod 55.
  - Resulta que en aritmètica modular, es pot calcular l'arrel cúbica elevant a un altre nombre. Pel cas de $N = 55$, cal elevar a $d = 27$.
  - Si fem 51^{27} i restem múltiples de 55 fins a caure entre 0 i 54 obtenim 6, que és el missatge original.
- Per què això és segur?
  - Per desxifrar el missatge, cal saber calcular arrels cúbiques mod N. Què evita que Eve pugui prendre una arrel cúbica mod N?

El criptosistema RSA: un exemple de joguina

- Alice vol enviar un missatge a Bob. Aleshores Bob fa el següent:
  - Pren un producte de dos primers, per exemple $N = 5 \cdot 11 = 55$.
  - Fa públic el nombre 55, per ex. posant-lo a la seva web.
- L'Alice veu que la clau pública d'en Bob és $N = 55$.
  - Un missatge són nombres mòdul 55, és a dir nombres entre 0 i 54.
  - Suposem que el missatge és $m = 6$.
  - En comptes d'enviar m, enviem $m^3 \pmod{55}$. És a dir $6^3 = 216$, restant 55 tants cops com faci falta per fer-lo caure entre 0 i 54.
  - Resulta que $216 = 3 \cdot 55 + 51 \rightsquigarrow$ envia $c = 51$.
- Bob rep $c = 51$. Per desxifrar-ho, ha de fer l'arrel cúbica mod 55.
  - Resulta que en aritmètica modular, es pot calcular l'arrel cúbica elevant a un altre nombre. Pel cas de $N = 55$, cal elevar a $d = 27$.
  - Si fem 51^{27} i restem múltiples de 55 fins a caure entre 0 i 54 obtenim 6, que és el missatge original.
- Per què això és segur?
  - Per desxifrar el missatge, cal saber calcular arrels cúbiques mod N. Què evita que Eve pugui prendre una arrel cúbica mod N?
  - Si N és molt gran, només es coneixen mètodes ràpids per a calcular arrels cúbiques si en coneixem els dos factors primers.

RSA: exemple real

$p =$ 5311520355088381732434640236485900354436072788334240607719207689566489176525

9588109185123498599491128573613382194379700775829505261007423053350140642582 31

$q =$ 5009685181411005100125133414437627030624530352244501699703092725010366500853

5997628269932914411203856611856161140314779996692076749777532250263743482451

RSA: exemple real

$p = 531152035508838173243464023648590035443607278833424060771920768956648917652595881091851234985994911285736133821943797007758295052610074230533501406425823$1

$q = 500968518141100510012513341443762703062453035224450169970309272501036650085359976282699329144112038566118561611403147799966920767497775322502637434824$51

$N = p \cdot q = 266090448136491858656087087644543894339358132113624905266766200406606069738332398935278121358059082883578358255506936272393112089229182386012583877576619197611558833191955371379078398791746585571581288598268271975546399045471558153206117636851717198684278848912675136749852296244180056449598227893408080418$1

RSA: exemple real

$N = p \cdot q =$ 26609044813649185865608708764454389433935813211362490526676620040660606973833239893527812135805908288357835825550693627239311208922918238601258387757661919761155883319195537137907839879174658557158128859826827197554639904547155815320611763685171719868427884891267513674985229624418005644959822789340808041811

RSA: exemple real

$N = p \cdot q =$ 26609044813649185865608708764454389433935813211362490526676620040660606973833239893527812135805908288357835825550693627239311208922918238601258387757661919761155883319195537137907839879174658557158128859826827197554639904547155815320611763685171719868427884891267513674985229624418005644959822789340808041814

- $N = p \cdot q$ té unes 300 xifres ($N \simeq 2.6 \times 10^{300}$)

RSA: exemple real

$N = p \cdot q =$ 26609044813649185865608708764454389433935813211362490526676620040660606973833239893527812135805908288357835825550693627239311208922918238601258387757661919761155883319195537137907839879174658557158128859826827197554639904547155815320611763685171719868427884891267513674985229624418005644959822789340808041814

- $N = p \cdot q$ té unes 300 xifres ($N \simeq 2.6 \times 10^{300}$)
- Com de gran és aquest nombre? Quant trigaríem a factorizar-lo?

RSA: exemple real

$N = p \cdot q =$ 26609044813649185865608708764454389433935813211362490526676620040660606973833239893527812135805908288357835825550693627239311208922918238601258387757661919761155883319195537137907839879174658557158128859826827197554639904547155815320611763685171719868427884891267513674985229624418005644959822789340808041811

- $N = p \cdot q$ té unes 300 xifres ($N \simeq 2.6 \times 10^{300}$)
- Com de gran és aquest nombre? Quant trigaríem a factorizar-lo?
- Hauríem provar unes 10^{150} operacions...

RSA: exemple real

$N = p \cdot q =$ 26609044813649185865608708764454389433935813211362490526676620040660606973833239893527812135805908288357835825550693627239311208922918238601258387757661919761155883319195537137907839879174658557158128859826827197554639904547155815320611763685171719868427884891267513674985229624418005644959822789340808041811

- $N = p \cdot q$ té unes 300 xifres ($N \simeq 2.6 \times 10^{300}$)
- Com de gran és aquest nombre? Quant trigaríem a factorizar-lo?
- Hauríem provar unes 10^{150} operacions...
- Un ordinador avui en dia pot fer unes 10^{11} operacions per segon...

RSA: exemple real

$N = p \cdot q =$ 26609044813649185865608708764454389433935813211362490526676620040660606973833239893527812135805908288357835825550693627239311208922918238601258387757661919761155883319195537137907839879174658557158128859826827197554639904547155815320611763685171719868427884891267513674985229624418005644959822789340808041811

- $N = p \cdot q$ té unes 300 xifres ($N \simeq 2.6 \times 10^{300}$)
- Com de gran és aquest nombre? Quant trigaríem a factorizar-lo?
- Hauríem provar unes 10^{150} operacions...
- Un ordinador avui en dia pot fer unes 10^{11} operacions per segon...
- Trigariem uns 10^{139} segons, que són $\sim 10^{131}$ anys...

RSA: exemple real

$N = p \cdot q =$ 26609044813649185865608708764454389433935813211362490526676620040660606973833239893527812135805908288357835825550693627239311208922918238601258387757661919761155883319195537137907839879174658557158128859826827197554639904547155815320611763685171719868427884891267513674985229624418005644959822789340808041811

- $N = p \cdot q$ té unes 300 xifres ($N \simeq 2.6 \times 10^{300}$)
- Com de gran és aquest nombre? Quant trigaríem a factorizar-lo?
- Hauríem provar unes 10^{150} operacions...
- Un ordinador avui en dia pot fer unes 10^{11} operacions per segon...
- Trigariem uns 10^{139} segons, que són $\sim 10^{131}$ anys...
- L'edat de l'univers és de 1.3×10^{10} anys!

RSA: exemple real

$N = p \cdot q =$ 26609044813649185865608708764454389433935813211362490526676620040660606973833239893527812135805908288357835825550693627239311208922918238601258387757661919761155883319195537137907839879174658557158128859826827197554639904547155815320611763685171719868427884891267513674985229624418005644959822789340808041811

- $N = p \cdot q$ té unes 300 xifres ($N \simeq 2.6 \times 10^{300}$)
- Com de gran és aquest nombre? Quant trigaríem a factorizar-lo?
- Hauríem provar unes 10^{150} operacions...
- Un ordinador avui en dia pot fer unes 10^{11} operacions per segon...
- Trigariem uns 10^{139} segons, que són $\sim 10^{131}$ anys...
- L'edat de l'univers és de 1.3×10^{10} anys!
- Això seria fent el mètode naïf, però hi ha mètodes més ràpids:

RSA: exemple real

$N = p \cdot q =$ 26609044813649185865608708764454389433935813211362490526676620040660606973833239893527812135805908288357835825550693627239311208922918238601258387757661919761155883319195537137907839879174658557158128859826827197554639904547155815320611763685171719868427884891267513674985229624418005644959822789340808041811

- $N = p \cdot q$ té unes 300 xifres ($N \simeq 2.6 \times 10^{300}$)
- Com de gran és aquest nombre? Quant trigaríem a factorizar-lo?
- Hauríem provar unes 10^{150} operacions...
- Un ordinador avui en dia pot fer unes 10^{11} operacions per segon...
- Trigariem uns 10^{139} segons, que són $\sim 10^{131}$ anys...
- L'edat de l'univers és de 1.3×10^{10} anys!
- Això seria fent el mètode naïf, però hi ha mètodes més ràpids:
  - Récord actual: factoritzar un producte de dos primers de 232 dígits (equivalent a 2000 anys de càlculs en un processador a $2.2GHz$)

L'amenaça quàntica

- La seguretat a internet es basa en què no es coneix cap mètode ràpid per factoritzar enters grans...amb un ordinador clàssic

L'amenaça quàntica

- La seguretat a internet es basa en què no es coneix cap mètode ràpid per factoritzar enters grans...amb un ordinador clàssic
- 1995: Peter Shor trobà un mètode ràpid amb un ordinador quàntic

L'amenaça quàntica

- La seguretat a internet es basa en què no es coneix cap mètode ràpid per factoritzar enters grans...amb un ordinador clàssic
- 1995: Peter Shor trobà un mètode ràpid amb un ordinador quàntic

- Utilitza principis de la mecànica quàntica (superposició, entrellaçament) per a processar la informació
- En comptes de bits (0's i 1's) utilitza qubits (superposicions de 0 i 1)
- Funciona amb una lògica diferent, que permet resoldre certs problemes més ràpidament que amb ordinadors clàssics.

L'amenaça quàntica

- La seguretat a internet es basa en què no es coneix cap mètode ràpid per factoritzar enters grans...amb un ordinador clàssic
- 1995: Peter Shor trobà un mètode ràpid amb un ordinador quàntic

- Utilitza principis de la mecànica quàntica (superposició, entrellaçament) per a processar la informació
- En comptes de bits (0's i 1's) utilitza qubits (superposicions de 0 i 1)
- Funciona amb una lògica diferent, que permet resoldre certs problemes més ràpidament que amb ordinadors clàssics.

- El 1995 no hi havia ordinadors quàntics, avui ja n'hi ha alguns però no són prou potents encara per trencar RSA

L'amenaça quàntica

- La seguretat a internet es basa en què no es coneix cap mètode ràpid per factoritzar enters grans...amb un ordinador clàssic
- 1995: Peter Shor trobà un mètode ràpid amb un ordinador quàntic

- Utilitza principis de la mecànica quàntica (superposició, entrellaçament) per a processar la informació
- En comptes de bits (0's i 1's) utilitza qubits (superposicions de 0 i 1)
- Funciona amb una lògica diferent, que permet resoldre certs problemes més ràpidament que amb ordinadors clàssics.

- El 1995 no hi havia ordinadors quàntics, avui ja n'hi ha alguns però no són prou potents encara per trencar RSA
- Arribaran els ordinadors quàntics capaços de trencar RSA?

L'amenaça quàntica

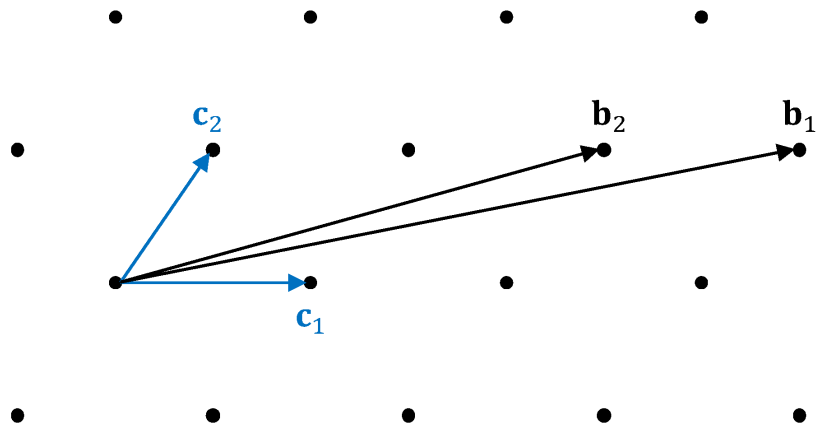
- La seguretat a internet es basa en què no es coneix cap mètode ràpid per factoritzar enters grans...amb un ordinador clàssic
- 1995: Peter Shor trobà un mètode ràpid amb un ordinador quàntic

- Utilitza principis de la mecànica quàntica (superposició, entrellaçament) per a processar la informació
- En comptes de bits (0's i 1's) utilitza qubits (superposicions de 0 i 1)
- Funciona amb una lògica diferent, que permet resoldre certs problemes més ràpidament que amb ordinadors clàssics.

- El 1995 no hi havia ordinadors quàntics, avui ja n'hi ha alguns però no són prou potents encara per trencar RSA
- Arribaran els ordinadors quàntics capaços de trencar RSA?
- Els investigadors en criptografia busquen xifrats postquàntics

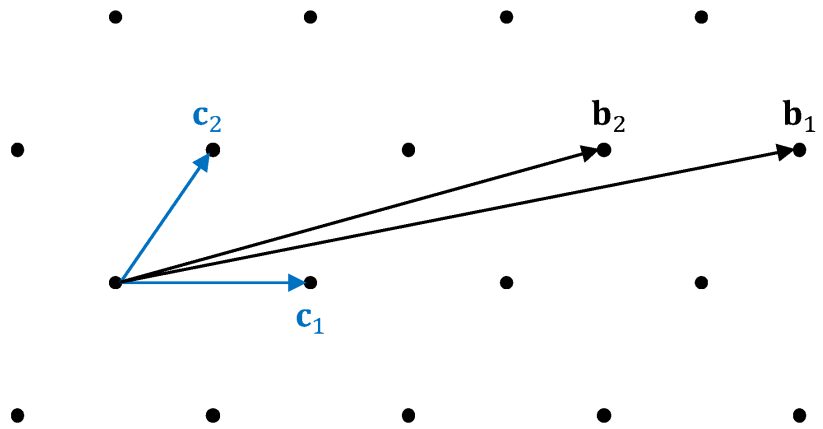
Dels nombres enters als reticles

- Reticle: combinacions lineals enteres d'uns quants vectors



Dels nombres enters als reticles

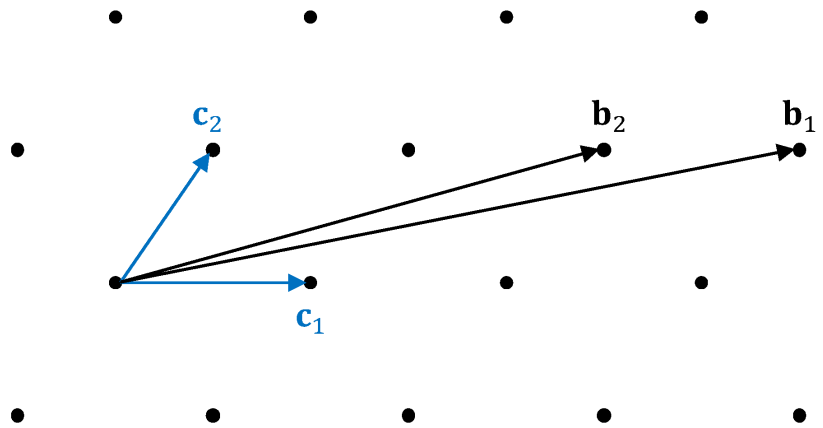
- Reticle: combinacions lineals enteres d'uns quants vectors



- El missatge és un punt del reticle, xifrem amb una pertorbació

Dels nombres enters als reticles

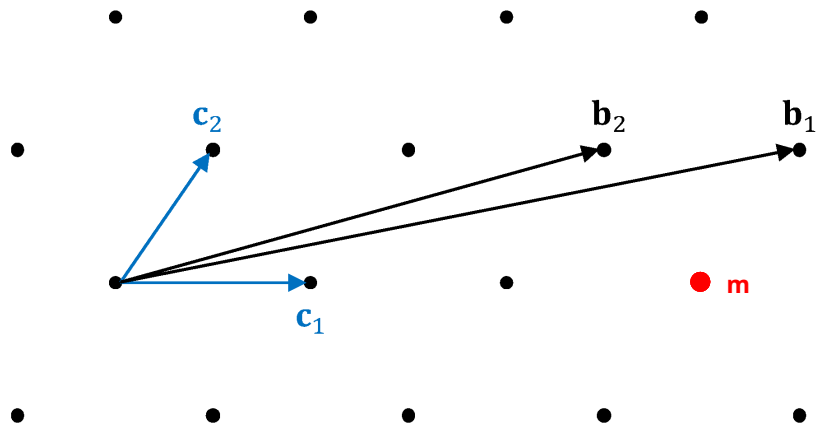
- Reticle: combinacions lineals enteres d'uns quants vectors



- El missatge és un punt del reticle, xifrem amb una pertorbació
- Si la base no és ortogonal, és difícil recuperar el punt inicial

Dels nombres enters als reticles

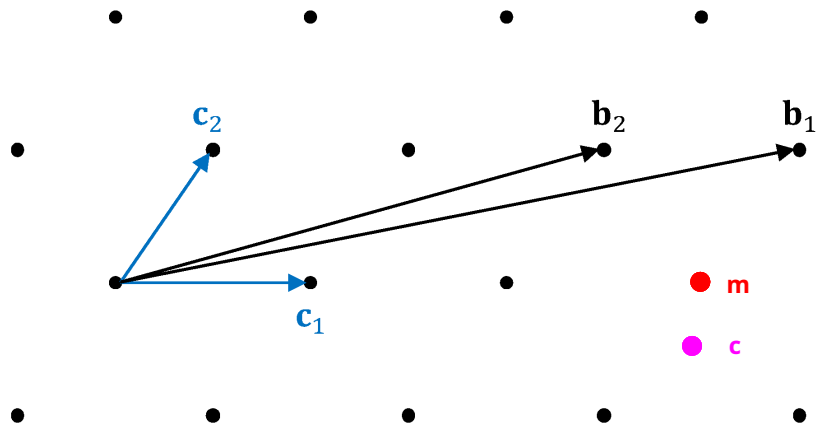
- Reticle: combinacions lineals enteres d'uns quants vectors



- El missatge és un punt del reticle, xifrem amb una pertorbació
- Si la base no és ortogonal, és difícil recuperar el punt inicial

Dels nombres enters als reticles

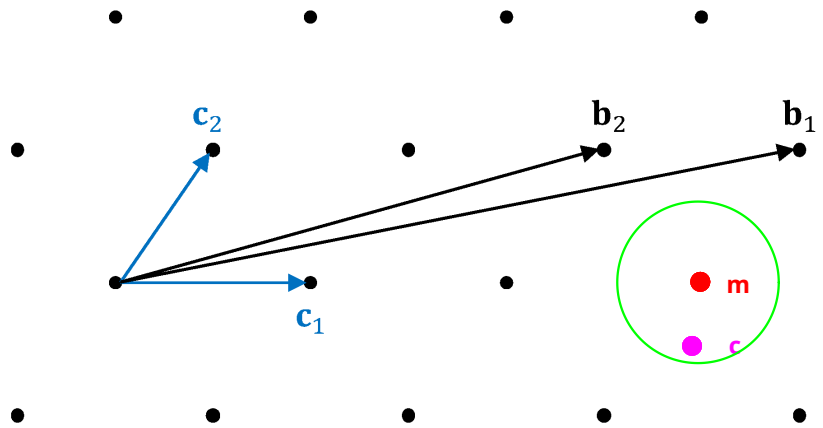
- Reticle: combinacions lineals enteres d'uns quants vectors



- El missatge és un punt del reticle, xifrem amb una pertorbació
- Si la base no és ortogonal, és difícil recuperar el punt inicial

Dels nombres enters als reticles

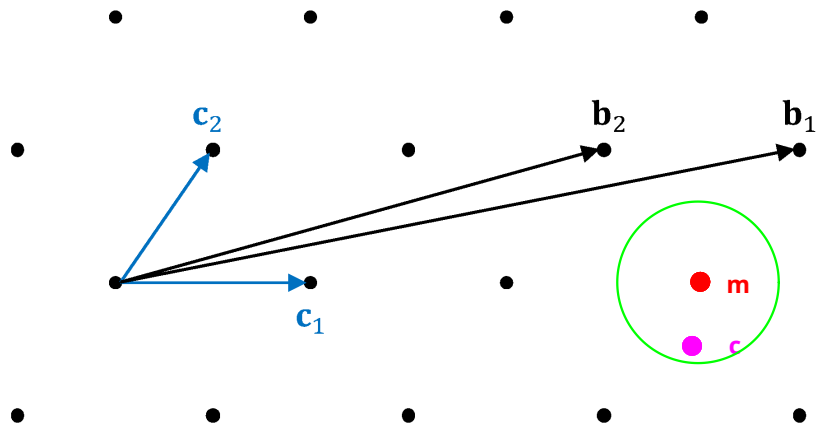
- Reticle: combinacions lineals enteres d'uns quants vectors



- El missatge és un punt del reticle, xifrem amb una pertorbació
- Si la base no és ortogonal, és difícil recuperar el punt inicial

Dels nombres enters als reticles

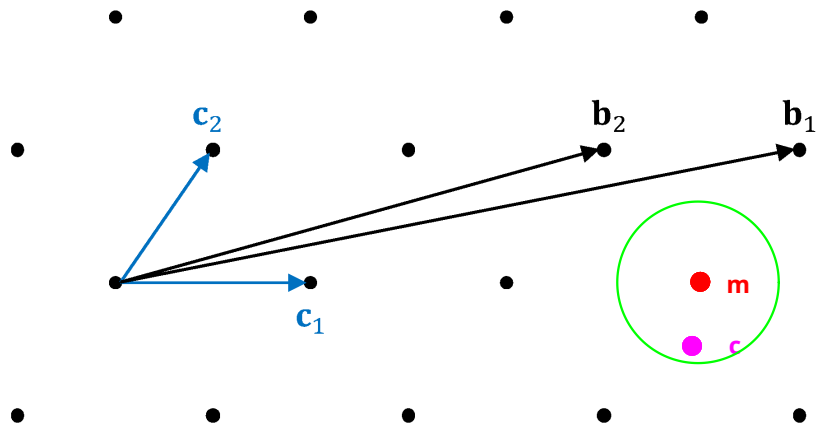
- Reticle: combinacions lineals enteres d'uns quants vectors



- El missatge és un punt del reticle, xifrem amb una pertorbació
- Si la base no és ortogonal, és difícil recuperar el punt inicial
- Criptosistema GGH (Goldreich–Goldwasser–Halevi)

Dels nombres enters als reticles

- Reticle: combinacions lineals enteres d'uns quants vectors



- El missatge és un punt del reticle, xifrem amb una pertorbació
- Si la base no és ortogonal, és difícil recuperar el punt inicial
- Criptosistema GGH (Goldreich–Goldwasser–Halevi)

  - Shafi Goldwasser: professora a MIT i Premi Turing 2012 per les seves moltes contribucions a la criptografia

Per a saber-ne més

- The code book, Simon Singh.
  - Llibre d'història de la criptografia. Cobreix tot el que hem vist i molt més de manera amena i entenedora.

Per a saber-ne més

- The code book, Simon Singh.
  - Llibre d'història de la criptografia. Cobreix tot el que hem vist i molt més de manera amena i entenedora.
- `https://www.simonsingh.net/The_Black_Chamber/`
  - Pàgina web on podeu jugar a encriptar i desencriptar missatges. Té molts xifrats, els que hem vist i alguns que no...

Per a saber-ne més

- The code book, Simon Singh.
  - Llibre d'història de la criptografia. Cobreix tot el que hem vist i molt més de manera amena i entenedora.
- `https://www.simonsingh.net/The_Black_Chamber/`
  - Pàgina web on podeu jugar a encriptar i desencriptar missatges. Té molts xifrats, els que hem vist i alguns que no...
- The imitation game (Desxifrant l'Enigma)
  - pel·lícula del 2014 on s'explica la història d'Alan Turing i com va trencar el xifrat d'enigma.

Per a saber-ne més

- The code book, Simon Singh.
  - Llibre d'història de la criptografia. Cobreix tot el que hem vist i molt més de manera amena i entenedora.
- `https://www.simonsingh.net/The_Black_Chamber/`
  - Pàgina web on podeu jugar a encriptar i desencriptar missatges. Té molts xifrats, els que hem vist i alguns que no...
- The imitation game (Desxifrant l'Enigma)
  - pel·lícula del 2014 on s'explica la història d'Alan Turing i com va trencar el xifrat d'enigma.
- Videos sobre la màquina enigma de James Grime (googlejar: numberphile enigma)

Per a saber-ne més

- The code book, Simon Singh.
  - Llibre d'història de la criptografia. Cobreix tot el que hem vist i molt més de manera amena i entenedora.
- `https://www.simonsingh.net/The_Black_Chamber/`
  - Pàgina web on podeu jugar a encriptar i desencriptar missatges. Té molts xifrats, els que hem vist i alguns que no...
- The imitation game (Desxifrant l'Enigma)
  - pel·lícula del 2014 on s'explica la història d'Alan Turing i com va trencar el xifrat d'enigma.
- Videos sobre la màquina enigma de James Grime (googlejar: numberphile enigma)
- És un bon tema per a un treball de recerca!

Criptografia: les matemàtiques de la informació secreta

Xevi Guitart

Departament de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona