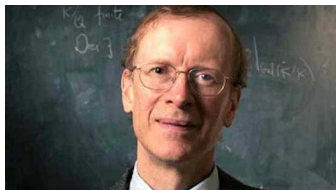


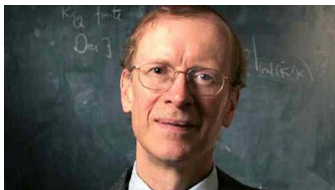
Equacions diofàntiques

Xevi Guitart

Algunes cares

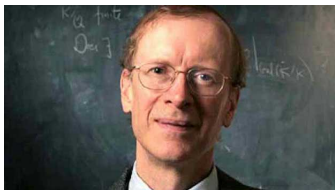


Algunes cares

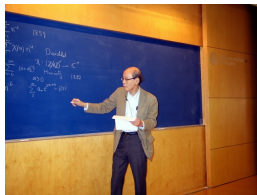


Andrew Wiles (1953)

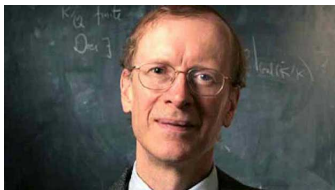
Algunes cares



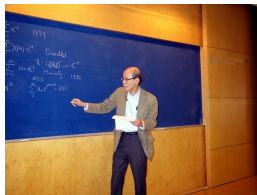
Andrew Wiles (1953)



Algunes cares

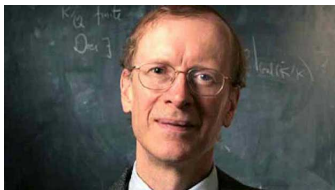


Andrew Wiles (1953)

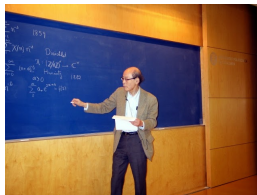


Goro Shimura
(1930-2019)

Algunes cares



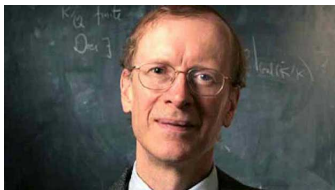
Andrew Wiles (1953)



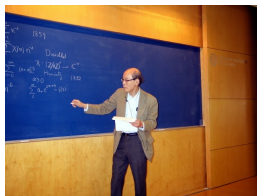
Goro Shimura
(1930-2019)



Algunes cares



Andrew Wiles (1953)

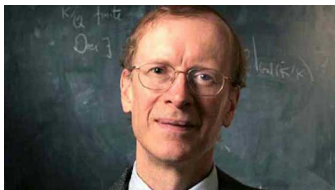


Goro Shimura
(1930-2019)

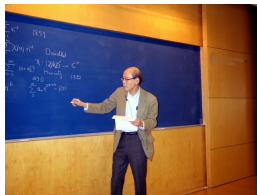


Pierre Fermat
(1601-1665)

Algunes cares



Andrew Wiles (1953)



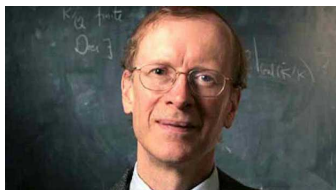
Goro Shimura
(1930-2019)



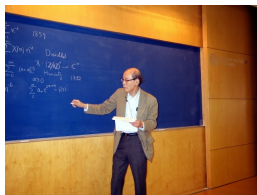
Pierre Fermat
(1601-1665)



Algunes cares



Andrew Wiles (1953)



Goro Shimura
(1930-2019)



Pierre Fermat
(1601-1665)



Sophie Germain
(1776-1831)

Equacions diofàntiques

- Una equació diofàntica és una equació en la que estem interessats només en les solucions enteres.
- El nom prové de Diofant d'Alexandria (s. III dC), que ja les considerà al seu llibre “Aritmètica”.
- Exemples:

- ▶ Trobar totes les parelles de nombres $x, y \in \mathbb{Z}$ que satisfan:

$$12x + 14y = 2$$

- ▶ En general les equacions $ax + by = c$ amb $a, b, c \in \mathbb{Z}$ s'anomenen equacions diofàntiques lineals amb dues incògnites.
- ▶ L'equació $w^3 + x^3 = y^3 + z^3$ té moltes solucions no trivial (per exemple $12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3 = 1729$, “Hardy-Ramanujan number”).
- En general resoldre equacions diofàntiques és difícil:
 - ▶ És una àrea de recerca molt activa avui en dia.
 - ▶ Un exemple famós i mediàtic és el “darrer teorema de Fermat”.

Equacions diofàntiques

- Una equació diofàntica és una equació en la que estem interessats només en les solucions enteres.
- El nom prové de Diofant d'Alexandria (s. III dC), que ja les considerà al seu llibre “Aritmètica”.

- Exemples:

- ▶ Trobar totes les parelles de nombres $x, y \in \mathbb{Z}$ que satisfan:

$$12x + 14y = 2$$

- ▶ En general les equacions $ax + by = c$ amb $a, b, c \in \mathbb{Z}$ s'anomenen equacions diofàntiques lineals amb dues incògnites.

- ▶ L'equació $w^3 + x^3 = y^3 + z^3$ té moltes solucions enteres no trivial, però fins al 1955 no es trobava cap solució amb nombres naturals.

- En general resoldre equacions diofàntiques és difícil:

- ▶ És una àrea de recerca molt activa avui en dia.
- ▶ Un exemple famós i mediàtic és el “darrer teorema de Fermat”.

Equacions diofàntiques

- Una equació diofàntica és una equació en la que estem interessats només en les solucions enteres.
- El nom prové de Diofant d'Alexandria (s. III dC), que ja les considerà al seu llibre “Aritmètica”.
- Exemples:
 - ▶ Trobar totes les parelles de nombres $x, y \in \mathbb{Z}$ que satisfan:

$$12x + 14y = 2$$

- ▶ En general les equacions $ax + by = c$ amb $a, b, c \in \mathbb{Z}$ s'anomenen equacions diofàntiques lineals amb dues incògnites.
 - ▶ L'equació $w^3 + x^3 = y^3 + z^3$ admet aquesta solució no trivial $12^3 + 1^3 = 9^3 + 10^3 = 1729$ (“Hardy-Ramanujan number”).
- En general resoldre equacions diofàntiques és difícil:
 - ▶ És una àrea de recerca molt activa avui en dia.
 - ▶ Un exemple famós i mediàtic és el “darrer teorema de Fermat”.

Equacions diofàntiques

- Una equació diofàntica és una equació en la que estem interessats només en les solucions enteres.
- El nom prové de Diofant d'Alexandria (s. III dC), que ja les considerà al seu llibre “Aritmètica”.
- Exemples:
 - ▶ Trobar totes les parelles de nombres $x, y \in \mathbb{Z}$ que satisfan:

$$12x + 14y = 2$$

- ▶ En general les equacions $ax + by = c$ amb $a, b, c \in \mathbb{Z}$ s'anomenen equacions diofàntiques lineals amb dues incògnites.
 - ▶ L'equació $w^3 + x^3 = y^3 + z^3$ admet aquesta solució no trivial $12^3 + 1^3 = 9^3 + 10^3 = 1729$ (“Hardy-Ramanujan number”).
- En general resoldre equacions diofàntiques és difícil:
 - ▶ És una àrea de recerca molt activa avui en dia.
 - ▶ Un exemple famós i mediàtic és el “darrer teorema de Fermat”.

Equacions diofàntiques

- Una equació diofàntica és una equació en la que estem interessats només en les solucions enteres.
- El nom prové de Diofant d'Alexandria (s. III dC), que ja les considerà al seu llibre “Aritmètica”.
- Exemples:
 - ▶ Trobar totes les parelles de nombres $x, y \in \mathbb{Z}$ que satisfan:

$$12x + 14y = 2$$

- ▶ En general les equacions $ax + by = c$ amb $a, b, c \in \mathbb{Z}$ s'anomenen equacions diofàntiques lineals amb dues incògnites.
 - ▶ L'equació $w^3 + x^3 = y^3 + z^3$ admet aquesta solució no trivial $12^3 + 1^3 = 9^3 + 10^3 = 1729$ (“Hardy-Ramanujan number”)
- En general resoldre equacions diofàntiques és difícil:
 - ▶ És una àrea de recerca molt activa avui en dia.
 - ▶ Un exemple famós i mediàtic és el “darrer teorema de Fermat”.

Equacions diofàntiques

- Una equació diofàntica és una equació en la que estem interessats només en les solucions enteres.
- El nom prové de Diofant d'Alexandria (s. III dC), que ja les considerà al seu llibre “Aritmètica”.
- Exemples:
 - ▶ Trobar totes les parelles de nombres $x, y \in \mathbb{Z}$ que satisfan:

$$12x + 14y = 2$$

- ▶ En general les equacions $ax + by = c$ amb $a, b, c \in \mathbb{Z}$ s'anomenen equacions diofàntiques lineals amb dues incògnites.
 - ▶ L'equació $w^3 + x^3 = y^3 + z^3$ admet aquesta solució no trivial $12^3 + 1^3 = 9^3 + 10^3 = 1729$ (“Hardy-Ramanujan number”)
- En general resoldre equacions diofàntiques és difícil:
 - ▶ És una àrea de recerca molt activa avui en dia.
 - ▶ Un exemple famós i mediàtic és el “darrer teorema de Fermat”.

Equacions diofàntiques

- Una equació diofàntica és una equació en la que estem interessats només en les solucions enteres.
- El nom prové de Diofant d'Alexandria (s. III dC), que ja les considerà al seu llibre “Aritmètica”.
- Exemples:
 - ▶ Trobar totes les parelles de nombres $x, y \in \mathbb{Z}$ que satisfan:

$$12x + 14y = 2$$

- ▶ En general les equacions $ax + by = c$ amb $a, b, c \in \mathbb{Z}$ s'anomenen equacions diofàntiques lineals amb dues incògnites.
 - ▶ L'equació $w^3 + x^3 = y^3 + z^3$ admet aquesta solució no trivial $12^3 + 1^3 = 9^3 + 10^3 = 1729$ (“Hardy-Ramanujan number”)
- En general resoldre equacions diofàntiques és difícil:
 - ▶ És una àrea de recerca molt activa avui en dia.
 - ▶ Un exemple famós i mediàtic és el “darrer teorema de Fermat”.

Les ternes pitagòriques

- $x^2 + y^2 = z^2$ té solucions enteres no trivials?
(i.e. amb $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$)
 - ▶ Sí, per exemple $3^2 + 4^2 = 5^2$, o $115^2 + 252^2 = 277^2$.
 - ▶ Les solucions es diuen ternes pitagòriques. N'hi ha infinites i es pot donar una fórmula per a totes elles.
- I l'equació $x^3 + y^3 = z^3$?
- $x^4 + y^4 = z^4$?
- O en general $x^n + y^n = z^n$ amb n un exponent fixat > 2 ?

Les ternes pitagòriques

- $x^2 + y^2 = z^2$ té solucions enteres no trivials?
(i.e. amb $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$)
 - ▶ Sí, per exemple $3^2 + 4^2 = 5^2$, o $115^2 + 252^2 = 277^2$.
 - ▶ Les solucions es diuen ternes pitagòriques. N'hi ha infinites i es pot donar una fórmula per a totes elles.
- I l'equació $x^3 + y^3 = z^3$?
- $x^4 + y^4 = z^4$?
- O en general $x^n + y^n = z^n$ amb n un exponent fixat > 2 ?

Les ternes pitagòriques

- $x^2 + y^2 = z^2$ té solucions enteres no trivials?
(i.e. amb $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$)
 - ▶ Sí, per exemple $3^2 + 4^2 = 5^2$, o $115^2 + 252^2 = 277^2$.
 - ▶ Les solucions es diuen ternes pitagòriques. N'hi ha infinites i es pot donar una fórmula per a totes elles.
- I l'equació $x^3 + y^3 = z^3$?
- $x^4 + y^4 = z^4$?
- O en general $x^n + y^n = z^n$ amb n un exponent fixat > 2 ?

Les ternes pitagòriques

- $x^2 + y^2 = z^2$ té solucions enteres no trivials?
(i.e. amb $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$)
 - ▶ Sí, per exemple $3^2 + 4^2 = 5^2$, o $115^2 + 252^2 = 277^2$.
 - ▶ Les solucions es diuen ternes pitagòriques. N'hi ha infinites i es pot donar una fórmula per a totes elles.
- I l'equació $x^3 + y^3 = z^3$?
- $x^4 + y^4 = z^4$?
- O en general $x^n + y^n = z^n$ amb n un exponent fixat > 2 ?

Les ternes pitagòriques

- $x^2 + y^2 = z^2$ té solucions enteres no trivials?
(i.e. amb $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$)
 - ▶ Sí, per exemple $3^2 + 4^2 = 5^2$, o $115^2 + 252^2 = 277^2$.
 - ▶ Les solucions es diuen ternes pitagòriques. N'hi ha infinites i es pot donar una fórmula per a totes elles.
- I l'equació $x^3 + y^3 = z^3$?
- $x^4 + y^4 = z^4$?
- O en general $x^n + y^n = z^n$ amb n un exponent fixat > 2 ?

Les ternes pitagòriques

- $x^2 + y^2 = z^2$ té solucions enteres no trivials?
(i.e. amb $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$)
 - ▶ Sí, per exemple $3^2 + 4^2 = 5^2$, o $115^2 + 252^2 = 277^2$.
 - ▶ Les solucions es diuen ternes pitagòriques. N'hi ha infinites i es pot donar una fórmula per a totes elles.
- I l'equació $x^3 + y^3 = z^3$?
- $x^4 + y^4 = z^4$?
- O en general $x^n + y^n = z^n$ amb n un exponent fixat > 2 ?

El darrer teorema de Fermat

- Fermat era un matemàtic (aficionat) que va contribuir al càlcul diferencial, probabilitats, òptica i teoria de nombres.
- Feia anotacions al seu exemplar de l'Aritmètica de Diofant...
- ...però no les demostrava. En un marge hi va escriure:
És impossible que un cub sigui la suma de dos cubs, que una potència quarta sigui la suma de dues potències quarts i, en general, que qualsevol nombre que sigui una potència superior a dos sigui la suma de dues potències del mateix valor. He descobert una demostració veritablement meravellosa d'aquesta proposició, però aquest marge és massa estret perquè hi càpiga.
- L'equació $x^n + y^n = z^n$ no té solucions enteres no trivials si $n > 2$.
- Matemàtics posteriors (Euler, Gauss, Legendre...) van anar demostrant totes les afirmacions que feia Fermat...menys aquesta

El darrer teorema de Fermat

- Fermat era un matemàtic (aficionat) que va contribuir al càlcul diferencial, probabilitats, òptica i teoria de nombres.
- Feia anotacions al seu exemplar de l'Aritmètica de Diofant...
- ...però no les demostrava. En un marge hi va escriure:
És impossible que un cub sigui la suma de dos cubs, que una potència quarta sigui la suma de dues potències quarts i, en general, que qualsevol nombre que sigui una potència superior a dos sigui la suma de dues potències del mateix valor. He descobert una demostració veritablement meravellosa d'aquesta proposició, però aquest marge és massa estret perquè hi càpiga.
- L'equació $x^n + y^n = z^n$ no té solucions enteres no trivials si $n > 2$.
- Matemàtics posteriors (Euler, Gauss, Legendre...) van anar demostrant totes les afirmacions que feia Fermat...menys aquesta

El darrer teorema de Fermat

- Fermat era un matemàtic (aficionat) que va contribuir al càlcul diferencial, probabilitats, òptica i teoria de nombres.
- Feia anotacions al seu exemplar de l'Aritmètica de Diofant...
- ...però no les demostrava. En un marge hi va escriure:
És impossible que un cub sigui la suma de dos cubs, que una potència quarta sigui la suma de dues potències quarts i, en general, que qualsevol nombre que sigui una potència superior a dos sigui la suma de dues potències del mateix valor. He descobert una demostració veritablement meravellosa d'aquesta proposició, però aquest marge és massa estret perquè hi càpiga.
- L'equació $x^n + y^n = z^n$ no té solucions enteres no trivials si $n > 2$.
- Matemàtics posteriors (Euler, Gauss, Legendre...) van anar demostrant totes les afirmacions que feia Fermat...menys aquesta

El darrer teorema de Fermat

- Fermat era un matemàtic (aficionat) que va contribuir al càlcul diferencial, probabilitats, òptica i teoria de nombres.
- Feia anotacions al seu exemplar de l'Aritmètica de Diofant...
- ...però no les demostrava. En un marge hi va escriure:
És impossible que un cub sigui la suma de dos cubs, que una potència quarta sigui la suma de dues potències quarts i, en general, que qualsevol nombre que sigui una potència superior a dos sigui la suma de dues potències del mateix valor. He descobert una demostració veritablement meravellosa d'aquesta proposició, però aquest marge és massa estret perquè hi càpiga.
- L'equació $x^n + y^n = z^n$ no té solucions enteres no trivials si $n > 2$.
- Matemàtics posteriors (Euler, Gauss, Legendre...) van anar demostrant totes les afirmacions que feia Fermat...menys aquesta

El darrer teorema de Fermat

- Fermat era un matemàtic (aficionat) que va contribuir al càlcul diferencial, probabilitats, òptica i teoria de nombres.
- Feia anotacions al seu exemplar de l'Aritmètica de Diofant...
- ...però no les demostrava. En un marge hi va escriure:
És impossible que un cub sigui la suma de dos cubs, que una potència quarta sigui la suma de dues potències quarts i, en general, que qualsevol nombre que sigui una potència superior a dos sigui la suma de dues potències del mateix valor. He descobert una demostració veritablement meravellosa d'aquesta proposició, però aquest marge és massa estret perquè hi càpiga.
- L'equació $x^n + y^n = z^n$ no té solucions enteres no trivials si $n > 2$.
- Matemàtics posteriors (Euler, Gauss, Legendre...) van anar demostrant totes les afirmacions que feia Fermat...menys aquesta

El darrer teorema de Fermat

- Fermat era un matemàtic (aficionat) que va contribuir al càlcul diferencial, probabilitats, òptica i teoria de nombres.
- Feia anotacions al seu exemplar de l'Aritmètica de Diofant...
- ...però no les demostrava. En un marge hi va escriure:
És impossible que un cub sigui la suma de dos cubs, que una potència quarta sigui la suma de dues potències quartes i, en general, que qualsevol nombre que sigui una potència superior a dos sigui la suma de dues potències del mateix valor. He descobert una demostració veritablement meravellosa d'aquesta proposició, però aquest marge és massa estret perquè hi càpiga.
- L'equació $x^n + y^n = z^n$ no té solucions enteres no trivials si $n > 2$.
- Matemàtics posteriors (Euler, Gauss, Legendre...) van anar demostrant totes les afirmacions que feia Fermat...menys aquesta

El darrer teorema de Fermat

- Durant 300 anys va ser el motor per a moltes de les tècniques que s'han anat introduint a l'àlgebra i la teoria de nombres.
- Molt notablement Sophie Germain va demostrar l'anomenat Cas I per a exponents primers $n \leq 100$ (Cas I: cap dels x, y, z és divisible per n)
- Al 1982 es va relacionar aquest teorema amb la “Conjectura de Shimura–Taniyama”, una conjectura sobre uns objectes que s'anomenen corbes el·líptiques.
- Andrew Wiles (culminant el treball de moltíssims matemàtics) va demostrar finalment la conjectura de Shimura–Taniyama el 1995
- Amb la qual cosa va demostrar també el teorema de Fermat.
- Avui en dia hi ha molta recerca en equacions “de tipus Fermat”

El darrer teorema de Fermat

- Durant 300 anys va ser el motor per a moltes de les tècniques que s'han anat introduint a l'àlgebra i la teoria de nombres.
- Molt notablement Sophie Germain va demostrar l'anomenat Cas I per a exponents primers $n \leq 100$ (Cas I: cap dels x, y, z és divisible per n)
- Al 1982 es va relacionar aquest teorema amb la “Conjectura de Shimura–Taniyama”, una conjectura sobre uns objectes que s'anomenen corbes el·líptiques.
- Andrew Wiles (culminant el treball de moltíssims matemàtics) va demostrar finalment la conjectura de Shimura–Taniyama el 1995
- Amb la qual cosa va demostrar també el teorema de Fermat.
- Avui en dia hi ha molta recerca en equacions “de tipus Fermat”

El darrer teorema de Fermat

- Durant 300 anys va ser el motor per a moltes de les tècniques que s'han anat introduint a l'àlgebra i la teoria de nombres.
- Molt notablement Sophie Germain va demostrar l'anomenat Cas I per a exponents primers $n \leq 100$ (Cas I: cap dels x, y, z és divisible per n)
- Al 1982 es va relacionar aquest teorema amb la “Conjectura de Shimura–Taniyama”, una conjectura sobre uns objectes que s'anomenen corbes el·líptiques.
- Andrew Wiles (culminant el treball de moltíssims matemàtics) va demostrar finalment la conjectura de Shimura–Taniyama el 1995
- Amb la qual cosa va demostrar també el teorema de Fermat.
- Avui en dia hi ha molta recerca en equacions “de tipus Fermat”

El darrer teorema de Fermat

- Durant 300 anys va ser el motor per a moltes de les tècniques que s'han anat introduint a l'àlgebra i la teoria de nombres.
- Molt notablement Sophie Germain va demostrar l'anomenat Cas I per a exponents primers $n \leq 100$ (Cas I: cap dels x, y, z és divisible per n)
- Al 1982 es va relacionar aquest teorema amb la “Conjectura de Shimura–Taniyama”, una conjectura sobre uns objectes que s'anomenen corbes el·líptiques.
- Andrew Wiles (culminant el treball de moltíssims matemàtics) va demostrar finalment la conjectura de Shimura–Taniyama el 1995
- Amb la qual cosa va demostrar també el teorema de Fermat.
- Avui en dia hi ha molta recerca en equacions “de tipus Fermat”

El darrer teorema de Fermat

- Durant 300 anys va ser el motor per a moltes de les tècniques que s'han anat introduint a l'àlgebra i la teoria de nombres.
- Molt notablement Sophie Germain va demostrar l'anomenat Cas I per a exponents primers $n \leq 100$ (Cas I: cap dels x, y, z és divisible per n)
- Al 1982 es va relacionar aquest teorema amb la “Conjectura de Shimura–Taniyama”, una conjectura sobre uns objectes que s'anomenen corbes el·líptiques.
- Andrew Wiles (culminant el treball de moltíssims matemàtics) va demostrar finalment la conjectura de Shimura–Taniyama el 1995
- Amb la qual cosa va demostrar també el teorema de Fermat.
- Avui en dia hi ha molta recerca en equacions “de tipus Fermat”

El darrer teorema de Fermat

- Durant 300 anys va ser el motor per a moltes de les tècniques que s'han anat introduint a l'àlgebra i la teoria de nombres.
- Molt notablement Sophie Germain va demostrar l'anomenat Cas I per a exponents primers $n \leq 100$ (Cas I: cap dels x, y, z és divisible per n)
- Al 1982 es va relacionar aquest teorema amb la “Conjectura de Shimura–Taniyama”, una conjectura sobre uns objectes que s'anomenen corbes el·líptiques.
- Andrew Wiles (culminant el treball de moltíssims matemàtics) va demostrar finalment la conjectura de Shimura–Taniyama el 1995
- Amb la qual cosa va demostrar també el teorema de Fermat.
- Avui en dia hi ha molta recerca en equacions “de tipus Fermat”

The Fermat-type equations $x^5 + y^5 = 2z^p$ or $3z^p$ solved through $\mathbb{Q}$ -curves

Luis Dieulefait and Nuno Freitas

August 8, 2018

Abstract

We solve the Diophantine equations $x^5 + y^5 = dz^p$ with $d = 2, 3$ for a set of prime numbers of density $1/4$, $1/2$, respectively. The method consists in relating a possible solution to another diophantine equation and solving the later by using $\mathbb{Q}$ -curves and a generalized modular technique as in work of Ellenberg and Dieulefait-Jimenez along with some new techniques for eliminating newforms.

1 Introduction

Equations of the form

$$x^5 + y^5 = dz^p \quad (1)$$

were first studied by Billerey in [1] and then by Billerey-Dieulefait in [2] by using the classic modular approach via elliptic curves over $\mathbb{Q}$. Their work includes the solution for an infinite number of values for d but the method there does not work in the cases $d = 2$ or $d = 3$. Here we will approach the problem for these values of d making use of $\mathbb{Q}$ -curves to apply a generalized modular technique as in the work of Dieulefait-Jimenez (see [4]). To fulfill our strategy we also need to introduce and generalize techniques to eliminate newforms.

We call a triple (a, b, c) such that $a^5 + b^5 = dc^p$ and $(a, b) = 1$ a *primitive* solution and we will say it is a *trivial* solution if also $c = 1$. In what follows we will show that for $d = 2$ there is a subset of the prime numbers with density $1/4$ such that there are no non trivial primitive solutions to (1) and that if $d = 3$ the same is true but with a set of density $1/2$. In both cases for the rest of primes the non existence of solutions would follow immediately from a generalization of Ellenberg's work on the surjectivity of Galois representations attached to $\mathbb{Q}$ -curves (see theorem 3.14 in [5]) to real quadratic extensions.

Let γ be an integer divisible only by primes $l \not\equiv 1 \pmod{5}$. In this paper we will prove the following theorems:

Per a saberne més

- L'enigma de Fermat, de Simon Singh.

- Documental de la BBC

<https://www.dailymotion.com/video/x223gx8>

o googlegeu: horizon fermat's last theorem