

# Per què ens agrada la música?

## Una resposta matemàtica

Tomás Sanz-Perela

### Resum

Per què ens agrada la música? Per què ens sembla que el so que produeix una o diverses tecles d'un piano és música i, en canvi, considerem que el so que fa un got en caure a terra és soroll? Per què quan d'un clarinet i d'una flauta sona la mateixa nota la sentim diferent? I quina és la raó per la qual, sense haver estudiat música, som capaços de distingir una persona que tot just acaba de començar a tocar el violí i ens sembla que desafina d'una que té més experiència i diem que afina?

En aquest article donarem resposta a aquestes preguntes fent servir les matemàtiques com a eina principal. Per fer-ho, prendrem com a punt de partida l'equació d'ones, que ens permetrà comprendre les característiques principals del so dels instruments musicals. A partir d'aquests coneixements podrem entendre les idees que s'han fet servir al llarg de la història per construir les escales musicals, que són la base de gran part de la música que coneixem. Finalment, estudiarem els conceptes de *dissonància* i *consonància* d'una manera matemàtica i entendrem millor per què alguns sons ens resulten més agradables que d'altres.

### English summary: Why do we like music? A mathematical answer

Why do we like music? Why do we feel that the sound produced by one or some piano keys is music and, however, we call noise the sound that a glass makes when falling to the ground? Why do we hear differently the same note played by a flute or a clarinet? And which is the reason why, without having studied music, we are able to distinguish a person that just started studying the violin and plays out of tune from an experienced one?

In this article, we give answers to these questions using mathematics as a main tool. To do it, our starting point will be the wave equation, which will allow us to understand the main properties of the sound of musical instruments. From this knowledge we will be able to understand the ideas that, along history, have been behind the construction of musical scales, which are the basis of most of the music that we know nowadays. Finally, we will study the concepts of *dissonance* and *consonance* from a mathematical perspective, and we will understand better why some sounds are more pleasant than others.

**Paraules clau:** equació d'ones, espectre harmònic, sèries de Fourier, escales musicals, dissonància.

**Keywords:** wave equation, harmonic spectrum, Fourier series, musical scales, dissonance.

**Classificació MSC2010:** 00A65, 35L05, 74K05

# Índex

<b>1</b>	<b>Conceptes preliminars</b>	<b>3</b>
1.1	Ones i so . . . . .	3
1.1.1	Les característiques del so . . . . .	3
1.2	Una primera noció de consonància . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Anàlisi matemàtica del so a partir de l'equació d'ones i les sèries de Fourier</b>	<b>4</b>
2.1	L'equació d'ones . . . . .	5
2.1.1	D'on surt l'equació d'ones? . . . . .	6
2.2	Primeres solucions de l'equació d'ones . . . . .	7
2.2.1	La fórmula de d'Alembert . . . . .	7
2.2.2	Continua la història: debat i controvèrsia . . . . .	8
2.3	Ressolució de l'equació d'ones . . . . .	10
2.3.1	Modes de vibració . . . . .	10
2.3.2	L'equació d'ones amb condicions inicials. Sèries de Fourier . . . . .	12
2.4	Què ens diu l'equació d'ones sobre el so dels instruments? . . . . .	14
2.5	L'espectre harmònic del so dels instruments . . . . .	16
2.5.1	La transformada de Fourier . . . . .	17
2.5.2	Aplicacions: síntesi i tractament de so . . . . .	18
<b>3</b>	<b>El problema de l'afinació dels instruments</b>	<b>19</b>
3.1	Escales i intervals . . . . .	20
3.1.1	L'equivalència d'octaves . . . . .	21
3.1.2	Com es mesura un interval . . . . .	22
3.2	L'evolució de l'afinació de l'escala cromàtica . . . . .	22
3.2.1	L'afinació pitagòrica i l'espiral de quintes . . . . .	23
3.2.2	Afinació justa . . . . .	24
3.2.3	Temperament igual . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Teoria de la dissonància</b>	<b>26</b>
4.1	Superposició de dues ones simples. Batecs i aspror . . . . .	26
4.2	Com mesurar la dissonància . . . . .	27
4.3	Corbes de dissonància . . . . .	28
4.4	Més enllà de l'espectre harmònic . . . . .	30

# 1 Conceptes preliminars

## 1.1 Ones i so

El so és una impressió produïda a l'oïda causada per les vibracions elàstiques d'un cos que es propaguen per l'aire (o altres medis materials) en forma d'ones. Molt sovint, però, també ens hi referim com la forma d'energia que produeix aquesta sensació. Mentre que la primera concepció, més sensorial, es relaciona amb una perspectiva més artística, la segona, més física, és la que prenem quan volem fer una anàlisi més objectiva d'aquest fenomen.

Les funcions trigonomètriques són els objectes matemàtics més bàsics que serveixen per descriure ones i vibracions. Als sons que són transmesos en forma d'ona simple els anomenem *tons purs* o *simples* i els representem de la manera següent:

$$u(t) = A \sin(2\pi ft - \phi).$$

A l'expressió anterior,  $t$  representa el temps;  $A$  és l'amplitud de l'ona;  $\phi$ , la fase,<sup>1</sup> i  $f$ , la **frequència** (que indica quantes oscil·lacions hi ha en un segon i es mesura en Hz). En alguns casos, ens referirem a una funció com aquesta com a *senyal*.

En el nostre dia a dia, però, mai no trobem tons purs; qualsevol so que sentim es transmet en forma d'ona molt més complexa que un to pur. Un dels grans desenvolupaments de les matemàtiques del segle XIX, l'anàlisi de Fourier, és el que avui ens permet analitzar el so complex en termes de tons simples i funcions trigonomètriques. Com veurem, la propietat més rellevant del so dels instruments musicals és que està format per una superposició de tons simples les freqüències dels quals estan distribuïdes d'una manera molt concreta. Aquest fet no només diferencia un so musical d'un so qualsevol, sinó que és el punt de partida d'una anàlisi profunda dels fenòmens de consonància i dissonància.

### 1.1.1 Les característiques del so

La dualitat entre la percepció sensorial i el fenomen físic del so també es veu reflectida quan parlem de les característiques del so. Tot seguit descrivim les característiques més importants per a aquest text, des d'un punt de vista sensorial i explicitant-ne la correspondència amb magnituds físiques:

- **Altura:** qualitat del so que permet distingir-ne un d'un altre i poder-los ordenar en una escala que va dels més greus als més aguts. No tots els sons tenen una altura definida, però, en el cas de tons simples, l'altura es correspon amb la seva freqüència. Pel que fa a les notes musicals produïdes per un instrument, l'altura es correspon amb la freqüència més baixa de totes les que componen el so (com veurem més endavant).

- **Sonoritat:** grau de sensació sonora produïda per un so d'una determinada intensitat

<sup>1</sup>En aquest article no entrarem a discutir aquesta magnitud i sempre veurem expressions amb  $\phi = 0$ . Noteu que fent un canvi de variables en el temps podem considerar  $\phi = 0$ .

acústica. Per a tons purs, està directament relacionada amb l'amplitud d'ona. D'una manera menys precisa, se l'anomena *volum*.

- Timbre: qualitat del so que permet distingir-ne dos que tenen la mateixa altura i sonoritat. Depèn directament de l'**espectre** (del qual parlarem a la secció 2.5).

## 1.2 Una primera noció de consonància

Podríem considerar que la relació entre les matemàtiques i la música comença a l'antiga Grècia, al segle VI a.C., al voltant de l'escola pitagòrica. Aquesta societat filosòfica i religiosa va ser fundada per Pitàgores, una figura clau en el desenvolupament de les matemàtiques, sempre envoltada de misteri i llegenda. És a aquest personatge —i la seva escola— a qui se li atribueixen les primeres anàlisis sobre la consonància.

### El monocordi

Per analitzar el so d'una corda en vibrar, els pitagòrics feien servir un monocordi, un instrument rudimentari d'una sola corda amb una caixa de ressonància que permetia modificar la longitud de la corda mitjançant un diapasó.



Els pitagòrics van observar que dues cordes de les mateixes característiques, sotmeses a la mateixa tensió, en ser tocades simultàniament produïen un so agradable si les longituds de les dues estaven en raons d'enters petits, com ara  $2 : 1$ ,  $3 : 2$ ,  $4 : 3$ , etc. Aquest és un exemple, potser el més antic, de llei de la naturalesa regida per l'aritmètica dels enters, un dels pilars de la doctrina pitagòrica, segons la qual el món que ens envolta està governat completament pels nombres.

Aquest fet observat pels pitagòrics és possiblement l'origen de l'escala musical que tots coneixem avui dia (vegeu la secció 3.2.1) i la base sobre la qual està construïda la gran majoria de la música occidental. Un dels objectius d'aquest article és donar una explicació a aquest fet responent una pregunta general: què és el que fa que dues notes tocades alhora ens agradin més o menys?

## 2 Anàlisi matemàtica del so a partir de l'equació d'ones i les sèries de Fourier

L'objectiu d'aquesta secció és entendre el so que produeix un instrument musical des d'una perspectiva matemàtica. Per dur-ho a terme, estudiarem un dels models més senzills que hi ha: l'**equació d'ones unidimensional**. Tot i que es tracta d'un model simplificat, aquesta equació ens proporciona una descripció força precisa del moviment d'una corda en vibrar, com ara, la d'un violí o una guitarra. En conseqüència, ens permet entendre el so que produeix.

Aquesta exposició té com a fil conductor la història que hi ha al darrere de la resolució de l'equació d'ones (per a informació més detallada, podeu consultar [15, 2, 3]). Per començar, presentarem l'equació d'ones i la deduirem amb arguments senzills a partir de la segona llei de Newton. Tot seguit, comentarem unes primeres solucions obtingudes per d'Alembert i

Euler a mitjans del segle XVIII. Continuarem la història esmentant de manera breu algunes de les aportacions més importants de matemàtics com Bernoulli o Lagrange fins a arribar a les idees de Fourier, ja a principis del segle XIX, que ens permetran resoldre l'equació d'ones i entendre el so que produeix una corda. La teoria de Fourier ens donarà una justificació matemàtica al fet que una corda pugui vibrar a més d'una freqüència alhora, o, dit d'una altra manera, al fet que un so complex es pugui descompondre en una superposició de tons simples. A més, a mesura que resolem l'equació d'ones veurem que la mateixa estructura de l'instrument fa que aquesta superposició de tons no sigui arbitrària, sinó que segueixi un patró molt clar: totes les freqüències de vibració d'una corda són múltiples enters positius d'una freqüència fonamental. Aquest fet és clau a l'hora d'entendre la música occidental, com veurem en les seccions següents. Acabarem aquesta secció definint el concepte d'*espectre* i presentant algunes aplicacions de la teoria de Fourier al tractament i la síntesi del so.

Aquesta és la part del text amb contingut matemàtic més avançat. Tot i que farem servir alguns conceptes bàsics d'anàlisi i equacions diferencials, amb uns coneixements elementals sobre derivació i integració n'hi ha prou per entendre la majoria dels arguments que descriurem. Les conclusions més importants per comprendre la resta del text són a la secció 2.4 i a la primera part de la secció 2.5.

## 2.1 L'equació d'ones

L'equació d'ones és una de les equacions en derivades parcials més famoses i antigues de la física matemàtica. Ens serveix com a model senzill per explicar el moviment d'una corda en vibrar.

El model és el següent: per descriure el moviment d'una corda de longitud  $L$  en vibrar, considerem una funció de dues variables que denotem per  $u$ :

$$\begin{aligned} u : [0, L] \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\mapsto u(x, t) \end{aligned}$$

El valor  $u(x, t)$  representa el desplaçament de la corda en el punt  $x$  respecte a la seva posició d'equilibri a l'instant de temps  $t$ .

Aquesta funció  $u$  satisfà l'equació en derivades parcials següent:

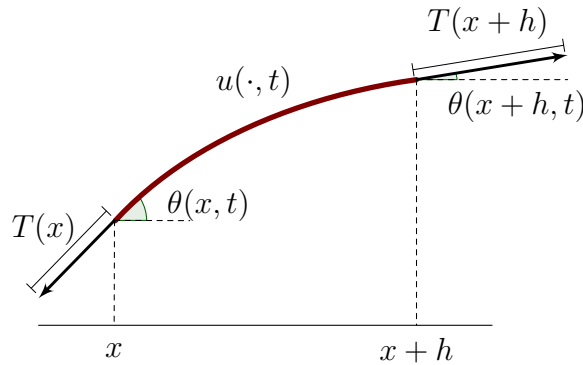
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad \text{per a } x \in (0, L), t > 0,$$

on  $c^2$  és una constant positiva que involucra les característiques físiques de la corda. En efecte,  $c^2 = \rho/\tau$ , on  $\rho$  representa la densitat lineal de la corda i  $\tau$ , la tensió.

**Notació:** en alguns punts de l'article farem servir  $u_{tt}$  i  $u_{xx}$  per denotar les segones derivades de  $u$  respecte al temps i l'espai respectivament.

### 2.1.1 D'on surt l'equació d'ones?

L'equació d'ones és essencialment la segona llei de Newton aplicada a un punt de la corda a escala infinitesimal. Recordem que aquesta llei involucra tres magnituds: força, massa i acceleració. Analitzem la primera de les tres a escala infinitesimal. Per fer-ho ens ajudarem de l'esquema següent, que representa el desplaçament vertical de la corda en un petit interval  $(x, x + h)$  en un instant de temps concret  $t$ , és a dir, la funció  $u(\cdot, t)$ :



Les fletxes que apareixen en aquest esquema representen la força que actua sobre els extrems d'aquest segment a causa del fet que la corda està separada de la seva posició de repòs. Aquí estem suposant que la corda és perfectament flexible, cosa que permet modelitzar la força de tensió en tot punt com una força tangencial. Com que ens interessa analitzar el moviment vertical de la corda, només ens ocuparem de la component vertical de la força que actua en el segment  $(x, x + h)$ , que anomenarem  $F_h$ . El mòdul d'aquesta magnitud vindrà donat per la diferència de les components verticals de les forces als extrems de segment de corda, és a dir,

$$F_h = T(x+h) \sin(\theta(x+h, t)) - T(x) \sin(\theta(x, t)).$$

Noteu que estem negligint altres forces com la gravetat o el fregament.<sup>2</sup> En un primer model senzill podem suposar que la tensió és uniforme a tota la corda, i val  $\tau$ . Aleshores, podem escriure

$$F_h = \tau (\sin(\theta(x+h, t)) - \sin(\theta(x, t))).$$

Si pensem en la corda d'un violí o una guitarra, és clar que el desplaçament transversal de la corda és molt petit en relació amb la longitud de la corda. Per tant, podem suposar que  $\theta(x, t)$  és molt petit i, en conseqüència,  $\cos(\theta(x, t)) \approx 1$ . Així, doncs, tenim l'aproximació següent:

$$\sin(\theta(x, t)) = \tan(\theta(x, t)) \cos(\theta(x, t)) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \cos(\theta(x, t)) \approx \frac{\partial u}{\partial x}(x, t).$$

Per tant, la força vertical  $F_h$  ve donada, essencialment, per la diferència de les primeres derivades en els punts  $x+h$  i  $x$ .

<sup>2</sup>Afegir al model una força com el fregament no afecta l'anàlisi que farem a la secció 2.3, només afegeix un decaïment exponencial en temps de l'amplitud del moviment, sense afectar-ne la freqüència de manera rellevant.

Si ara passem a escala infinitesimal (per fer-ho de manera rigorosa, cal dividir entre  $h$  i prendre el límit  $h \rightarrow 0$ ), obtenim que la component vertical de la força és proporcional a la segona derivada de  $u$  respecte a  $x$ , concretament

$$F(x, t) = \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t).$$

Segons la llei de Newton, aquesta força  $F$  ha de ser igual a la massa per l'acceleració. Notem, però, que a escala infinitesimal en lloc de la massa hem de considerar la densitat de la corda, que anomenem  $\rho$  (intuitivament, la densitat és la massa que té un “punt” concret de la corda). D'altra banda, recordem que l'acceleració (vertical) d'un “punt” de la corda és la segona derivada respecte al temps de  $u(x, t)$ , que és la posició d'aquest “punt”. Per tant, en aquest cas, la segona llei de Newton s'escriu com

$$\tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t),$$

que és l'equació d'ones.

## 2.2 Primeres solucions de l'equació d'ones

### 2.2.1 La fórmula de d'Alembert

Es podria dir que l'estudi del moviment de les cordes en vibrar mitjançant equacions en derivades parcials va començar a mitjans del segle XVIII. L'any 1747, el matemàtic francès Jean le Rond d'Alembert va deduir i resoldre una primera equació d'ones per a una corda sota unes certes condicions de periodicitat, simetria i regularitat [4]. Més tard, Leonhard Euler també va presentar un treball en què deduïa una equació d'ones una mica més general [5].

El fruit d'aquests treballs és una fórmula explícita per resoldre l'equació d'ones a  $\mathbb{R}$  (com si consideréssim una corda de longitud infinita). L'expressió, que avui es coneix com a **fórmula de d'Alembert**, és la següent:

$$u(x, t) = \frac{g(x + ct) + g(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(z) dz, \quad (2.1)$$

on  $g$  i  $h$  representen les condicions inicials (a  $t = 0$ ) del problema. En efecte, si calculem la posició inicial de la corda, trobem  $u(x, 0) = g(x)$ . De la mateixa manera, si derivem l'expressió anterior respecte al temps, obtenim  $\partial u / \partial t(x, 0) = h(x)$ , que representa la velocitat inicial. Noteu que, si calculem les segones derivades en temps i espai de  $u$  a partir de la fórmula (2.1), obtindrem efectivament que  $u$  resol l'equació d'ones a  $\mathbb{R}$ .

A partir d'aquesta fórmula també es pot resoldre el problema de la corda vibrant amb els extrems fixats, si es consideren unes simetries adients de les condicions inicials del problema (podeu consultar-ne els detalls a [14]). Tanmateix, en aquest cas l'expressió que obtenim a partir de (2.1) no serveix per comprendre de manera profunda el so que produeix una corda en vibrar, a diferència dels arguments que presentarem a la secció 2.3.

## 2.2.2 Continua la història: debat i controvèrsia

Poc després dels treballs de d'Alembert i Euler, un tercer matemàtic va entrar en el debat sobre la resolució de l'equació d'ones. Daniel Bernoulli va proposar una solució de la forma següent:

$$u(x, t) = A_1 \sin(\pi x/L) \cos(\pi ct/L) + A_2 \sin(2\pi x/L) \cos(2\pi ct/L) + \dots \quad (2.2)$$

En aquella època encara no es coneixia el principi de superposició (és a dir, que per a una equació lineal, com és el nostre cas, la suma de solucions també és una solució), i Bernoulli va ser incapaç de suggerir cap mètode per trobar una fórmula per als coeficients  $A_1$ ,  $A_2$ , ... (a partir de la posició i velocitat inicials).

En aquest punt de la història va sorgir un debat intens entre d'Alembert, Euler i Bernoulli (vegeu [15]). En primer lloc, d'Alembert estava convençut que les solucions de l'equació d'ones havien de ser diferenciables arreu, mentre que Euler suggeria estudiar, també, funcions amb

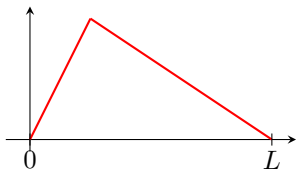


Figura 2.1: Condició inicial no diferenciable però perfectament admissible des d'un punt de vista físic.

“punxes”, com la que es mostra a la figura 2.1. D'Alembert argumentava que allà on les funcions no fossin diferenciables no es podia calcular la segona derivada (en espai). Per tant, en aquests punts l'equació d'ones no tenia sentit. Euler argumentava que, atès que l'equació era un model per a vibracions amb amplitud molt petita, el fet de considerar aquestes funcions no introduïa un error significatiu a l'hora de resoldre-les. De tota manera, sembla que en aquella època les matemàtiques no estaven prou desenvolupades per resoldre aquesta qüestió.

En segon lloc, tant d'Alembert com Euler tenien molts dubtes sobre la solució proposada per Bernoulli. D'una banda, d'Alembert no creia que una corda pogués vibrar amb més d'una freqüència i, per tant, la descomposició (2.2) no tenia cap sentit. D'altra banda, Euler pensava que aquesta descomposició no era prou general per incloure funcions no diferenciables.<sup>3</sup>

En aquest punt de la discussió, l'any 1759 una quarta persona va entrar al debat: el matemàtic Joseph-Louis Lagrange. En un extens treball [10], va considerar una discretització de la corda com un conjunt finit de masses puntuals. D'aquesta manera, l'equació d'ones es convertia en un sistema d'equacions diferencials ordinàries que es podia resoldre. Finalment, Lagrange va obtenir una solució de l'equació d'ones en fer tendir a infinit el nombre de masses

<sup>3</sup>Com es veuria més tard, tots dos estaven equivocats: la teoria de Fourier demostra que qualsevol funció contínua (i fins i tot més irregular) es pot expressar com una suma infinita de funcions trigonomètriques.



puntuals. Així, va obtenir la solució

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & \frac{2}{L} \int_0^L g(y) \left[ \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi ct}{L}\right) \right. \\
 & \left. + \sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi ct}{L}\right) + \dots \right] dy \\
 & + \frac{2}{\pi c} \int_0^L h(y) \left[ \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi ct}{L}\right) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi ct}{L}\right) + \dots \right] dy,
 \end{aligned}$$

on  $g$  i  $h$  són, respectivament, la posició i la velocitat inicials de la corda. Aquesta expressió va portar Lagrange molt a prop del que avui dia es coneix com a *sèries de Fourier*, de les quals ens ocuparem a la secció següent. No obstant això, sembla que en aquell moment aquesta troballa no va ser prou satisfactòria: Lagrange buscava una solució integral a l'equació d'ones i, en lloc d'això, va trobar una solució com a sèrie infinita. A més, com Euler, Lagrange considerava que no es podia representar una funció arbitrària a partir d'una suma de funcions trigonomètriques perquè aquestes no eren prou generals. Sembla que aquestes són algunes de les raons per les quals Lagrange no va descobrir les sèries de Fourier. Cal notar, però, que tot i no estar d'acord amb les solucions proposades per Bernoulli, la solució de Lagrange aportava una manera de calcular els coeficients  $A_1, A_2, \dots$  de (2.2) en termes d'expressions integrals que involucraven funcions trigonomètriques i les condicions inicials.

A partir de la publicació de Lagrange, el debat entorn de l'equació d'ones es va apagar durant un temps. Per veure tancat aquest debat van haver de passar una mica més de cinquanta anys, durant els quals la teoria de funcions i altres qüestions matemàtiques van evolucionar. En efecte, no va ser fins al començament del segle XIX que Jean-Baptiste Joseph Fourier va donar, de manera indirecta, una solució satisfactòria al problema de l'equació d'ones.

Fourier estava interessat a resoldre l'equació de la calor,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad \text{per a } x \in (0, L), \quad t > 0,$$

que serveix com un model senzill per descriure l'evolució de la calor en una vareta de longitud  $L$ . Fins a aquell moment ningú no havia estat capaç de donar una solució a aquesta equació, llevat d'alguns casos concrets, en què les dades del problema (per exemple, les condicions inicials) involucraven funcions trigonomètriques. La idea revolucionària de Fourier va ser considerar situacions més complexes a partir de superposar aquestes solucions de casos senzills, la qual cosa el va portar al problema d'anàlisi següent: podem expressar “qualsevol” funció com a suma infinita de funcions trigonomètriques?

L'any 1807, Fourier va presentar a l'Acadèmia de Ciències francesa els seus primers estudis, en els quals exposava aquestes idees i afirmava que, efectivament, les sèries trigonomètriques podien expressar una funció arbitrària. El treball de Fourier no va tenir una

bona rebuda per part de l'Acadèmia (el president de la qual era Laplace, qui, com hem comentat, pensava que generalització com aquesta no era possible). No obstant això, Fourier es va dedicar a estudiar aquesta qüestió i va culminar el seu treball l'any 1822 amb la publicació de *Théorie analytique de la chaleur* [6], on va desenvolupar la teoria de les sèries de Fourier.<sup>4</sup>

Les idees de Fourier, tot i que van ser molt controvertides en els seus inicis (com hem vist, la comunitat matemàtica “desconfiava” d'aquestes sèries trigonomètriques), van revolucionar les matemàtiques d'aquella època i avui són una eina fonamental. En el problema que ens ocupa, el de la corda vibrant, les sèries de Fourier són la base teòrica que justifica les primeres idees de Bernoulli (i també les expressions que el mateix Lagrange havia trobat). A la secció següent ens dedicarem a resoldre l'equació d'ones amb l'ajuda de les sèries de Fourier, la qual cosa ens permetrà entendre d'una manera molt més profunda el so que produeix un instrument musical.

## 2.3 Ressolució de l'equació d'ones

En aquesta secció ens ocuparem de resoldre l'equació d'ones que modelitza una corda de longitud  $L$  fixada als extrems. Per fer-ho, seguirem el mètode de **separació de variables**, que ens permetrà trobar els **modes de vibració** de la corda. A continuació, seguint les idees de Fourier, considerarem que el moviment de la corda és una superposició dels seus modes de vibració. D'aquesta manera, la teoria de les sèries de Fourier ens servirà per trobar l'expressió adequada de la solució a l'equació d'ones amb condicions inicials.

### 2.3.1 Modes de vibració

Donada una corda amb els extrems fixats, el nostre primer objectiu és trobar un seguit de solucions (és a dir, maneres de vibrar de la corda) “bàsiques” o “simples”. Com no ens interessa un problema concret amb unes determinades condicions inicials, només considerarem l'equació en derivades parcials juntament amb les condicions de vora, és a dir,

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x \in (0, L), t \in \mathbb{R}, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

on  $L$  és la longitud de la corda i  $u$ , el seu desplaçament respecte a la posició d'equilibri.

El mètode de **separació de variables** consisteix a buscar solucions de la forma  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , és a dir, de variables separades. Si imposem que aquesta funció  $u$  resolgui l'equació d'ones, obtenim

$$XT'' = c^2 X''T,$$

on  $'$  denota la derivada d'una funció unidimensional respecte a la seva variable. Dividint

---

<sup>4</sup>Des del punt de vista actual, els resultats de Fourier no són totalment rigorosos, ja que en aquell moment no estava del tot perfilada la noció de funció ni la teoria d'integració. Peter Gustav Lejeune Dirichlet, uns anys més tard, va donar una demostració més rigorosa de quines condicions garantien la convergència de les sèries de Fourier [11].

convenientment l'equació anterior entre  $-c^2XT$ , arribem a

$$-\frac{T''}{c^2T} = -\frac{X''}{X}. \quad (2.3)$$

En aquesta igualtat, la part de l'esquerra només depèn de  $t$  i la part de la dreta, només de  $x$ . Per tant, (2.3) ha de ser una constant, que anomenarem  $\lambda$ :

$$-\frac{T''}{c^2T} = -\frac{X''}{X} = \lambda.$$

D'aquí obtenim, d'una banda, l'equació diferencial

$$T'' + \lambda c^2T = 0, \quad (2.4)$$

i, de l'altra, l'equació amb condicions de vora

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & x \in (0, L), \\ X(0) = X(L) = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Recordem que la condició  $X(0) = X(L) = 0$  descriu el fet que els extrems de la corda estan sempre fixos.

Una primera observació important és que, si  $X \not\equiv 0$ , la constant  $\lambda$  ha de ser positiva. En efecte, si multipliquem l'equació (2.5) per  $X$ , la integrem a  $(0, L)$  i fem servir la fórmula d'integració per parts, obtenim

$$\lambda \int_0^L X^2(x) dx = - \int_0^L X''(x)X(x) dx = \int_0^L (X')^2(x) dx > 0,$$

on hem fet servir que  $X(0) = X(L) = 0$  i que  $X$  no és constant (noteu que si  $X$  fos constant les condicions de vora farien que  $X \equiv 0$ ).

Però el fet realment interessant (les conseqüències del qual veurem més endavant) és que, si volem obtenir una solució no trivial de (2.5) —és a dir,  $X \not\equiv 0$ —, la constant  $\lambda$  no pot ser qualsevol nombre. Només per a uns valors concrets de  $\lambda$  obtindrem una solució diferent de zero, com veurem tot seguit.

Com que  $\lambda > 0$ , podem escriure  $\lambda = \omega^2$  i les solucions de  $X'' + \omega^2X = 0$  són de la forma

$$X(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x), \quad \text{amb } A, B \in \mathbb{R}.$$

Si imposem que  $X(0) = 0$ , necessàriament  $A = 0$  i, per tant,  $X(x) = B \sin(\omega x)$  amb  $B \neq 0$ . Si ara imposem que  $X(L) = 0$ , obtenim  $\sin(\omega L) = 0$ , i l'única manera de que aquesta igualtat se satisfaci és que  $\omega L$  sigui un múltiple enter de  $\pi$ . És a dir,  $\omega L = n\pi$  amb  $n \in \mathbb{Z}$ . Com que  $\lambda = \omega^2$ , només ens cal considerar enters positius, i per a cada  $n = 1, 2, \dots$  obtenim una

solució de la forma

$$X_n(x) = B_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n}x\right), \quad \text{amb } \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2.$$

Un cop trobats els possibles valors  $\lambda_n$ , els podem substituir a l'equació temporal (2.4), que resulta  $T'' + c^2(n\pi/L)^2T = 0$  i la seva solució és de la forma

$$T_n(x) = \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + \beta_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right),$$

amb  $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$ .

En conclusió, per a cada  $n = 1, 2, \dots$  tenim una solució de l'equació d'ones que satisfà les condicions de vora i que és de la forma

$$u_n(x, t) = \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad (2.6)$$

amb  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$  constants arbitràries.

És a dir, per a cada  $n$  tenim una “forma de la corda”  $X_n$ , que es mou amb moviment harmònic i varia l'amplitud al llarg del temps. A aquestes “formes” (o solucions)  $X_n$  se les anomena **modes de vibració**. A la figura 2.2 podem veure els quatre primers modes de vibració d'una corda. En aquest cas, la corda passa de la posició representada amb la línia contínua a la posició oposada, representada amb la línia discontinua, amb moviment harmònic donat per la funció  $T_n(t)$ . Veiem que el mode de vibració  $X_n$  té  $n$  **ventres**, punts de màxima distància a la posició d'equilibri, i  $n + 1$  **nodes**, punts on no hi ha moviment. Les ones amb aquesta forma s'anomenen **ones estacionàries**.

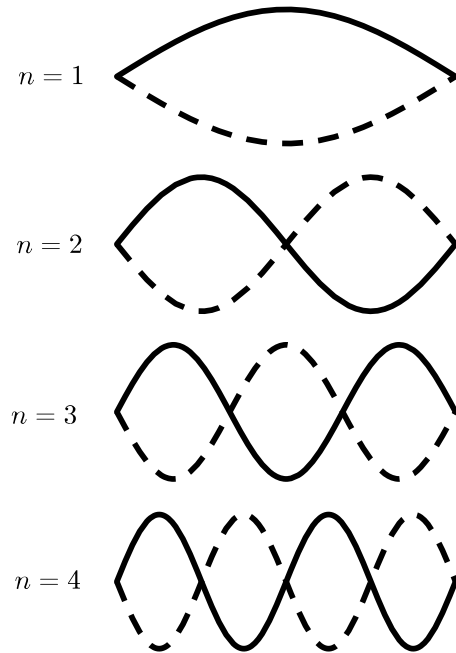


Figura 2.2: Els 4 primers modes de vibració d'una corda fixada pels extrems.

### 2.3.2 L'equació d'ones amb condicions inicials. Sèries de Fourier

Fins ara ens hem preocupat d'entendre algunes possibles solucions de l'equació d'ones sota certes condicions de vora, que corresponen a fixar els extrems d'una corda. Hem obtingut una sèrie de solucions  $u_n(x, t)$  —a variables separades, (2.6)— que d'alguna manera ens expliquen de quines formes pot vibrar la corda.

El nostre objectiu ara és resoldre el problema

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x \in (0, L), t > 0, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & t \geq 0, \\ u(x, 0) = g(x) & x \in [0, L], \\ u_t(x, 0) = h(x) & x \in [0, L], \end{cases} \quad (2.7)$$

on  $g(x)$  és la posició inicial de la corda i  $h(x)$ , la velocitat inicial. Això ens permetrà afirmar que podem descompondre qualsevol solució de l'equació d'ones com a combinació les solucions  $u_n$  trobades anteriorment.

El que volem és obtenir una solució a (2.7) a partir de les funcions  $u_n$ . Tal com hem comentat abans, com que l'equació d'ones és lineal, qualsevol combinació lineal (finita) de les  $u_n$  també resol l'equació d'ones i satisfà les condicions de vora. Així, doncs, volem fer una combinació lineal adequada de solucions (triant a (2.6) les constants  $a_n$  i  $b_n$  de manera adient) perquè les condicions inicials també se satisfacin. Si  $t = 0$ , obtenim  $u_n(x, 0) = a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$  i, per tant, si volem que una combinació lineal de les  $u_n$  sigui solució, necessitem poder expressar  $g(x)$  com una combinació lineal (finita) de  $\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ . No obstant això, aquest fet no sembla evident per a una funció  $g$  arbitrària. Tenim el mateix problema amb  $h(x)$ .

Per intentar resoldre aquest impediment, ens plantegem, doncs, fer una combinació lineal **infinita** de solucions  $u_n$ :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \quad (2.8)$$

Observem que aquesta expressió satisfà les condicions de vora i resol formalment l'equació d'ones en derivar-la terme a terme i sense tenir-ne en compte la convergència. Si impossem les condicions inicials, obtenim

$$g(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (2.9)$$

en el cas de la posició inicial, i derivant formalment la sèrie,

$$h(x) = u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi c}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (2.10)$$

pel que fa a la velocitat inicial. D'aquesta manera, el problema apareix a l'hora de determinar uns  $a_n$  i  $b_n$  adequats perquè les expressions (2.9) i (2.10) siguin certes. És en aquest punt en què apareix la qüestió següent:

“Donada una funció arbitrària<sup>5</sup>  $\varphi$ , es poden trobar uns coeficients  $c_n$  tals que l’expressió

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

sigui certa? I, en aquest cas, els podem trobar de manera explícita?”

Com hem explicat més amunt, un problema molt similar al nostre, provinent de l’equació de la calor, va conduir Fourier a iniciar la teoria homònima: l’anàlisi de Fourier. El resultat més important d’aquesta teoria respon afirmativament la pregunta anterior i, en termes d’aquest article, el podem enunciar de la manera següent:

**Teorema 2.1.** *Tota funció contínua  $\varphi : (0, L) \rightarrow \mathbb{R}$  es pot expressar com<sup>6</sup>*

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \text{amb} \quad c_n = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

Si fem servir el teorema anterior a (2.9) i (2.10), obtenim les expressions

$$g(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \text{amb} \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad \text{i} \quad (2.11)$$

$$h(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi c}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \text{amb} \quad b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L h(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad (2.12)$$

per a la posició i la velocitat inicials. Per tant, si triem aquests coeficients per a l’expressió (2.8), obtindrem la solució del problema (2.7).

## 2.4 Què ens diu l’equació d’ones sobre el so dels instruments?

A la secció anterior hem vist que, si considerem una corda fixada pels extrems, podem descriure’n la manera de vibrar mitjançant una suma infinita de solucions periòdiques en el temps. És a dir, podem descompondre qualsevol vibració complexa en elements més senzills d’anàlitzar i entendre, els **modes de vibració**. Això ha estat possible gràcies a dos ingredients:

1. L’equació d’ones juntament amb les condicions de vora.<sup>7</sup> Aquests dos elements determinen no només els modes de vibració (és a dir, les “formes bàsiques” amb les quals

<sup>5</sup>En aquest cas, contínua, ja que volem que representi, per exemple, la posició inicial d’una corda real.

<sup>6</sup>En general, aquesta igualtat s’ha d’entendre com un límit a  $L^2$  (l’espai de funcions de quadrat integrable). De fet, és en aquest espai on es desenvolupa de manera natural tota la teoria de les sèries de Fourier. No obstant això, per als objectius d’aquest article n’hi ha prou amb assumir aquesta igualtat com a certa sense preocupar-nos massa de la convergència (de tota manera, si, per exemple, suposem que  $\varphi$  és contínua i diferenciable a trossos —com a la figura 2.1—, la convergència és uniforme).

<sup>7</sup>Les condicions de vora tenen un paper fonamental a l’hora de descriure l’espectre de freqüències d’un instrument (vegeu la nota al peu 10).

una corda pot vibrar), sinó també les freqüències a les quals vibra cada mode —vegeu (2.13) i (2.14).

2. La teoria de Fourier, que ens garanteix que sempre podem descriure qualsevol moviment de la corda vibrant a partir dels modes de vibració. Dit d'una altra manera, ens permet descompondre qualsevol condició inicial en els modes de vibració, estudiar el moviment de cada mode per separat (cadascun dels quals vibrarà amb una freqüència característica, com hem vist) i superposar aquests moviments per obtenir el moviment complex de la corda.

En resum, podem descriure el moviment d'una corda vibrant (fixada pels extrems) a partir de l'expressió

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi f_n t) + b_n \sin(2\pi f_n t)] \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad (2.13)$$

amb

$$f_n = \frac{nc}{2L} = n \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}, \quad (2.14)$$

on  $L$  és la longitud de la corda,  $\tau$  és la tensió i  $\rho$  és la densitat lineal de la corda (vegeu la secció 2.1). És a dir, la corda vibra **alhora** en les diferents freqüències  $f_n$ , que són totes múltiples enters de  $f_1$ , és a dir,  $f_n = n f_1$ . Aquesta superposició de freqüències és el que arriba a través de l'aire a l'orella d'una persona que està escoltant, la qual ho percep com un so musical.

Als nombres  $f_n$  se'ls anomena **freqüències de vibració** i al primer de tots,  $f_1$ , **freqüència fonamental**, ja que a partir d'aquest valor podem obtenir totes les altres freqüències, com es veu a (2.14). De fet, aquesta estructura tan regular de les freqüències apareix a la majoria d'instruments musicals i és un factor clau que ens permet distingir un so musical (com el que fa la corda d'un violoncel) d'un so qualsevol (per exemple, el d'un objecte que cau a terra). A més, podríem dir que aquesta distribució de freqüències és el pilar en què es basa la majoria de la música que coneixem avui dia, però parlarem d'aquesta qüestió de manera detallada a la secció 3.

### Com afinar un instrument de corda

Fixem-nos que la solució d'ones ens explica com podem afinar un instrument de corda, com ara una guitarra o un violoncel. **Afinar** un instrument de corda vol dir 'ajustar la freqüència fonamental d'una nota'. A partir de (2.14), veiem que en el cas d'una corda vibrant la freqüència fonamental és

$$f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}.$$

Els paràmetres  $L$  i  $\rho$ , que corresponen a la longitud i la densitat lineal de la corda respectivament, estan fixats per les característiques de l'instrument. En canvi, la majoria d'instruments de corda disposen de claus que permeten modificar la tensió  $\tau$  a la qual està sotmesa cada corda. Per tant, la solució de l'equació d'ones ens mostra que, si volem aconseguir una nota més aguda (amb una freqüència més alta), el que hem de fer és augmentar la tensió de la corda.

## 2.5 L'espectre harmònic del so dels instruments

A les seccions anteriors s'explica de manera matemàtica com una corda pot vibrar alhora a múltiples freqüències i, per tant, com pot produir un so que sigui la unió de diversos tons purs (ones sinusoidals simples), cadascun dels quals amb una freqüència i una amplitud concretes. En música se solen anomenar *harmònics* cadascun d'aquests tons simples en els quals es descompon el so que produeix un instrument. El volum de cada harmònic està determinat per l'amplitud de cada ona simple, que depèn directament dels coeficients  $a_n$  i  $b_n$  a l'expressió (2.13), és a dir, de les condicions inicials<sup>8</sup> —recordeu (2.11) i (2.12).

Donat un so qualsevol, no necessàriament d'un instrument musical, ens podem preguntar per quines freqüències està format. Per obtenir aquesta informació es fa servir una eina matemàtica anomenada **transformada de Fourier**, de la qual parlarem tot seguit. No obstant això, en general, el més probable és que obtinguem una sèrie de tons simples amb freqüències arbitràries, que no segueixin cap mena de patró.<sup>9</sup> En aquest cas general, els anomenarem *parcials* i només farem servir el terme *harmònic* quan les freqüències segueixin un partó de la forma  $f_n = nf_1$ , amb  $n = 1, 2, \dots$

Anomenem *espectre* el conjunt dels parcials d'un so (és a dir, les freqüències de vibració juntament amb les amplituds corresponents). En cas que les freqüències siguin totes múltiples enters d'una freqüència fonamental, farem servir el terme *espectre harmònic*.

L'espectre és un dels factors principals que determinen el **timbre** de cada instrument. És a dir, ens permet distingir-ne un d'un altre encara que toquin la mateixa nota alhora. Així, doncs, si una flauta i un violí toquen la mateixa nota (és a dir, produeixen un so amb la mateixa freqüència fonamental), tot i que la distribució de freqüències dels harmònics és la mateixa, el volum de cada harmònic del violí (és a dir, l'amplitud amb què oscil·la cada mode de vibració) serà diferent al de l'harmònic corresponent a la flauta. Fins i tot hi ha casos en què les característiques físiques de l'instrument fan que certs harmònics no siguin presents en el so. Una mostra d'això és el clarinet, l'espectre del qual està format per freqüències que són múltiples enters **senars** d'una freqüència fonamental.<sup>10</sup>

---

<sup>8</sup>Aquestes, al seu torn, depenen de dos factors: d'una banda, de la manera de tocar de l'interpret, i, de l'altra, de les característiques físiques de l'instrument.

<sup>9</sup>És només en situacions molt concretes (com per exemple passa amb els instruments, però no només en aquest cas) on tenim una eina extra a la nostra disposició: l'equació d'ones (o alguna altra equació que regeixi la vibració d'un material). L'equació d'ones, dit de manera informal, "força" el material a vibrar només amb unes certes freqüències (com ara  $f_n = nf_1$ , amb  $n = 1, 2, \dots$ , en el cas de l'equació d'ones en dimensió 1).

<sup>10</sup>L'equació d'ones també serveix per descriure el so d'un clarinet, però en aquest cas les condicions de vora canvien i hem de considerar  $\partial_x u(L, t) = 0$  en lloc de  $u(L, t) = 0$  (vegeu [1]). El problema es pot resoldre tal com ho hem fet en el cas de la corda, però els modes de vibració són diferents: a (2.5) hem de considerar les condicions de vora  $X(0) = X'(L) = 0$ , la qual cosa fa que les freqüències de l'espectre siguin  $f_n = (2n - 1)c/(4L)$ , és a dir, només apareixen múltiples senars de la freqüència fonamental  $f_1 = c/(4L)$ .



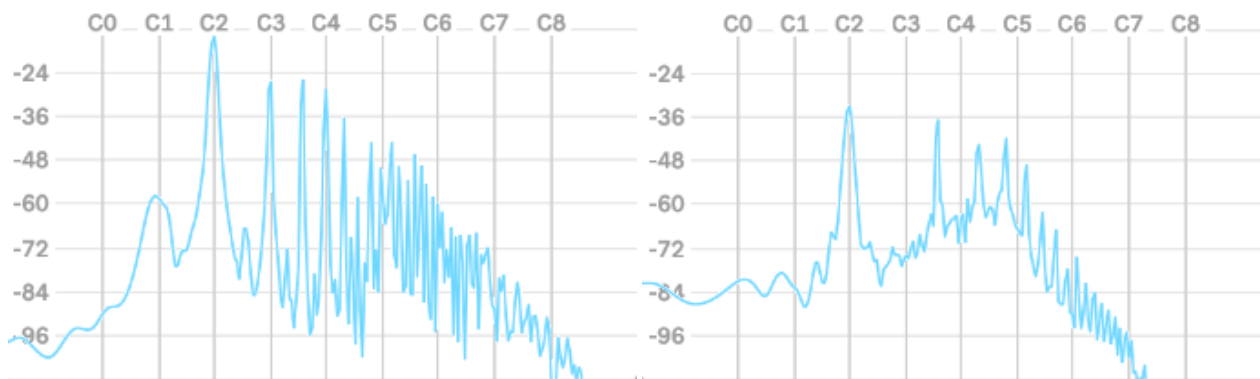


Figura 2.3: L'espectre de dos instruments tocant la mateixa nota, un *do* d'aproximadament 130 Hz de freqüència (C2 en notació anglosaxona). L'eix horitzontal dels gràfics representa les freqüències en escala logarítmica; l'inici de cada octava està marcat amb les línies verticals. L'eix vertical representa l'amplitud mesurada en decibels. En el segon gràfic es pot veure que només apareixen els harmònics senars.

### 2.5.1 La transformada de Fourier

Donada una funció  $u(t)$  d'una variable real  $t$ , la seva **transformada de Fourier** és una funció  $[\mathcal{F}u](\nu)$  d'una variable real  $\nu$  definida per l'expressió

$$[\mathcal{F}u](\nu) := \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-2\pi i\nu t} dt.$$

El propòsit de l'article no és estudiar de manera rigorosa aquest objecte matemàtic i, per aquest motiu, només ens ocuparem de donar-ne una definició intuïtiva i esmentar-ne algunes aplicacions.

El punt de partida per entendre el significat de la transformada de Fourier d'una funció és el càlcul heurístic següent:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t} dt \text{ " = " } \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq 0, \\ +\infty & \text{si } \alpha = 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

En el cas  $\alpha \neq 0$  hem fet servir fórmula d'Euler ( $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ) i hem suposat que les simetries de les funcions trigonomètriques fan que aquestes integrin 0 a  $(-\infty, \infty)$ .

Considerem ara la funció  $u(t) = \cos(2\pi t)$ , que podem entendre com un senyal senzill de freqüència 1, per calcular-ne transformada de Fourier. Per fer-ho, mitjançant la fórmula

d'Euler podem expressar  $u(t) = (e^{2\pi it} + e^{-2\pi it})/2$  i, utilitzant (2.15), tenim<sup>11</sup>

$$[\mathcal{F}u](\nu) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i(1-\nu)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i(1+\nu)t} dt \quad " = " \quad \begin{cases} 0 & \text{si } \nu \neq \pm 1, \\ +\infty/2 & \text{si } \nu = 1, \\ +\infty/2 & \text{si } \nu = -1. \end{cases}$$

Dit de manera intuïtiva, tota la massa de  $\mathcal{F}u$  es troba concentrada a  $|\nu| = 1$ . És a dir, la transformada de Fourier de  $u$  ha “detectat” que l'única freqüència present al senyal  $u$  és 1.

Si fem el mateix càlcul amb un senyal més complex, de la forma  $u(t) = a_1 \cos(2\pi f_1 t) + a_2 \cos(2\pi f_2 t) + \dots$ , obtindrem que  $[\mathcal{F}u](\nu) = 0$  arreu excepte si  $|\nu| = f_j$ . En aquest cas,  $[\mathcal{F}u](f_j) \quad " = " \quad a_j \cdot (+\infty/2)$ . És a dir,  $\mathcal{F}u$  detecta no només les freqüències de  $u(t)$ , sinó també en quina proporció apareixen al senyal. Dit d'una altra manera, descriu l'espectre del senyal  $u(t)$ .

Per a una funció  $u(t)$  general, la seva transformada de Fourier a un valor  $\nu$  es pot entendre, de manera informal, com una mesura de la proporció en què la freqüència  $\nu$  apareix a  $u(t)$ . En certa manera,  $\mathcal{F}$  “trenca” un senyal  $u(t)$  en totes les possibles freqüències i ens diu en quina proporció es troba cadascuna a  $u(t)$ . Per tant, és una eina essencial per analitzar l'espectre d'un so.

Com que  $\mathcal{F}u$  és una funció que pren valors complexos, el més habitual és representar l'espectre d'un senyal  $u$  a partir del gràfic de  $|\mathcal{F}u|$ . A la pràctica, encara que considerem un so amb espectre harmònic, mai no veurem els valors  $+\infty$  que hem trobat en el nostre argument heurístic, ja que totes les senyals tenen una durada finita. Tot i això, el que veiem a la realitat quan considerem un so amb espectre harmònic és un gràfic qualitativament semblant, és a dir, amb “pics” als punts on es localitzen les freqüències  $f_n$  (com es veu a la figura 2.3).

## 2.5.2 Aplicacions: síntesi i tractament de so

La veritable potència de la transformada de Fourier, però, és que es pot desfer. És a dir, existeix una operació inversa, anomenada **transformada de Fourier inversa**, que es defineix com

$$[\mathcal{F}^{-1}w](t) := \int_{-\infty}^{+\infty} w(\nu) e^{2\pi i\nu t} d\nu.$$

Així,  $[\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}u]](t) = u(t)$ .

Aquest fet ofereix un munt de possibilitats al món del tractament digital del so, com les que presentem tot seguit sense entrar-hi a fons:

- Síntesi de so: podem crear un so amb l'espectre que vulguem a partir de triar unes freqüències i amplituds i, després, aplicar-hi la transformada de Fourier inversa.

<sup>11</sup>Se li pot donar un sentit rigorós a aquest càlcul dins la teoria de distribucions. En aquest cas, si  $u(t) = \cos(2\pi t)$ , tenim  $\mathcal{F}u(\nu) = (\delta_0(\nu - 1) + \delta_0(\nu + 1))/2$ , on  $\delta_0$  és la delta de Dirac. La distribució  $\delta_0$  representa, de manera intuïtiva, una massa unitària concentrada en un sol punt, 0.

- Compressió d'arxius de so: podem analitzar la transformada de Fourier d'un senyal per identificar-ne les parts més importants i eliminar-ne la resta. La transformada inversa ens permet obtenir el senyal simplificat.
- Filtres, equalització, eliminació de soroll: gràcies a la transformada de Fourier podem aplicar un seguit d'operacions a una part concreta de l'espectre del so (com ara eliminar freqüències per sobre d'un cert valor o augmentar el volum de les greus). Aplicant la transformada inversa obtenim el so modificat.

### 3 El problema de l'afinació dels instruments

A la secció anterior hem fet servir les matemàtiques per entendre les propietats bàsiques del so dels instruments musicals. Hem entès per quin motiu podem descriure el so com una superposició de tons simples i hem vist que la distribució de freqüències d'aquests tons no és arbitrària, sinó que segueix un patró molt particular: totes les freqüències són múltiples enters d'una freqüència fonamental. Concretament, hem observat que les freqüències produïdes per una corda vibrant segueixen l'expressió

$$f_n = n \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}, \quad \text{amb } n = 1, 2, \dots, \quad (3.1)$$

on  $L$ ,  $\tau$  i  $\rho$  representen, respectivament, la longitud, la tensió i la densitat lineal de la corda (vegeu la secció 2.1). Un so que compleix aquestes característiques s'anomena **nota musical**. Si dos instruments produeixen una nota amb la mateixa freqüència fonamental, es considera que tots dos sons són la mateixa nota, encara que l'espectre de cadascun sigui diferent.

Fins ara ens hem centrat a entendre a fons l'element més bàsic de la música: les notes musicals. Ara bé, una nota per si mateixa no fa música: les melodies, les cançons o les obres musicals en general consisteixen en un seguit de notes, potser de diversos instruments, interpretades al llarg d'un temps i amb unes certes característiques. I, si bé l'oïda humana és capaç de distingir un gran ventall de freqüències, el més habitual és que les notes que constitueixen una melodia formen un conjunt finit prou reduït, la qual cosa ha estat així en la majoria de la música occidental des dels seus inicis.

Per entendre-ho de manera més senzilla, pensem en el funcionament d'un piano. En aquest instrument, cada tecla acciona un martell, el qual colpeja una corda.<sup>12</sup> La nota produïda depèn únicament de la tensió, la densitat i la llargària de la corda, com hem vist a (3.1), i, per tant, com que aquestes magnituds no es poden modificar mentre es toca l'instrument, amb una tecla només podem fer sonar una nota. És a dir, si es vol produir una altra nota, cal tocar una altra tecla, la qual fa vibrar una altra corda amb una longitud i tensió diferents. Per tant, el nombre de notes que pot fer un piano està limitat al nombre de tecles, habitualment

<sup>12</sup>Això és una simplificació. En realitat, la majoria de les notes del piano consten de tres cordes que són accionades alhora per un martell (que, de fet, vibren amb freqüències fonamentals molt properes però no iguals per aportar riquesa tímbrica al so de l'instrument). Només les notes més greus del piano consten d'una o dues cordes. En total, un piano té al voltant de 230 cordes.

88, i, en conseqüència, qualsevol música creada amb aquest instrument consistirà en una combinació més o menys complexa d'aquestes 88 notes.

Continuant amb aquest exemple, imaginem que volem construir un piano per fer música. A banda de qüestions tècniques, la pregunta més bàsica que ens podem fer és com hem de triar la freqüència fonamental de cada nota, la qual cosa només depèn de les característiques físiques de la corda —com hem vist a (3.1). En aquest context, s'anomena **afinació** l'elecció concreta de les freqüències fonamentals de les notes d'un instrument (o d'una escala, com veurem més endavant).

Com hem comentat, ja des dels inicis de la música s'havia observat que, si fem sonar simultàniament dues cordes amb les mateixes característiques (pel que fa a densitat i tensió), aquestes produeixen un so agradable si les longituds de totes dues es troben en una raó d'enters petits. Gràcies a (3.1), això equival al fet que les freqüències fonamentals de les notes que sonen formen una raó d'enters petits. Per tant, idealment, l'afinació del piano hauria de constar de freqüències que segueixin aquesta premissa. Tanmateix, aconseguir-ho per a totes les notes és una tasca complicada, com veurem tot seguit.

Al llarg de la història s'han fet diverses propostes per intentar donar una solució satisfactòria al problema de l'afinació dels instruments. En aquesta secció en presentarem tres que sintetitzen l'evolució històrica cap a l'afinació que fem servir avui dia: l'afinació pitagòrica, l'afinació justa i l'afinació temperada. Per fer-ho d'una manera més clara, introduïrem primer els conceptes d'*escala* i *interval*.

### 3.1 Escales i intervals

Anomenem **escala** un conjunt finit de notes ordenades segons la seva freqüència fonamental. Bona part de la música occidental fa servir l'**escala cromàtica**, que consta de dotze notes: *do*, *do♯*, *re*, *re♯*, *mi*, *fa*, *fa♯*, *sol*, *sol♯*, *la*, *la♯* i *si*, les quals corresponen a dotze tecles consecutives del piano.<sup>13</sup> L'escala cromàtica és una extensió de l'**escala diatònica major**, formada per les notes *do*, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la* i *si*, les quals es corresponen amb set tecles blanques consecutives del piano.

Aquestes escales són les que han determinat tradicionalment el nom de les notes musicals. Un piano està format per diverses escales cromàtiques successives, les notes de les quals reben el nom en funció de la posició que ocupen a l'escala. Així, doncs, després del *si*, que és l'última nota d'una escala cromàtica, ve la primera nota de l'escala següent, que s'anomena novament *do*, com es mostra a la figura 3.1. Aquesta repetició es deu a un fenomen anomenat **equivalència d'octaves**, del qual parlarem més endavant.

<sup>13</sup>Les notes amb el símbol ♯, anomenat **sostingut** o **diesi**, també es poden anomenar pel nom de la nota següent amb el símbol ♭, anomenat **bemoll**. Així, podem escriure l'escala cromàtica d'aquesta manera: *do*, *re♭*, *re*, *m♭*, *mi*, *fa*, *sob*, *sol*, *lab*, *la*, *s♭* i *si*.

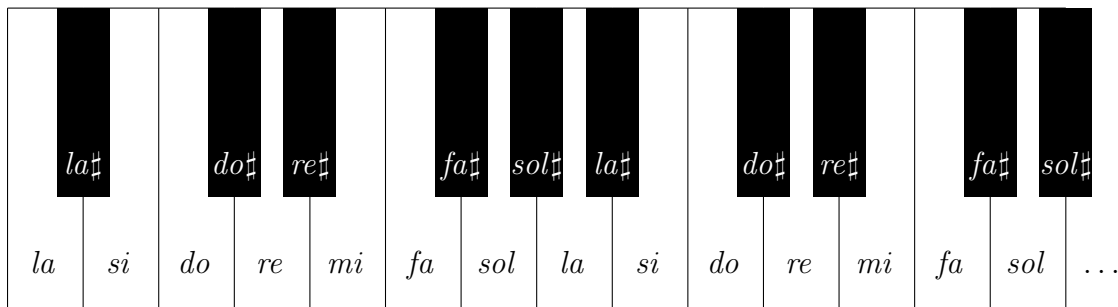


Figura 3.1: Representació parcial de les notes del piano.

La diferència d'altura entre dues notes s'anomena *interval* i es pot mesurar a partir de la freqüència fonamental de cadascuna, com veurem més endavant. En un context purament musical, els intervals de l'escala cromàtica s'acostumen a expressar mitjançant un ordinal seguit d'un adjectiu. Així, doncs, donades dues notes  $a$  i  $b$ , l'ordinal de l'interval que formen és definit pel nombre de notes que hi ha entre  $a$  i  $b$  (totes dues incloses) a l'escala diatònica. Per exemple, entre un  $re$  i un  $sol$  hi ha quatre notes,  $re$ ,  $mi$ ,  $fa$  i  $sol$ , i, per tant, formen un interval de quarta. Pel que fa a l'adjectiu, el determinen altres qualitats sonores de l'interval —en les quals no entrarem—, tot i que en una escala temperada (vegeu la secció 3.2.3) ve determinat pel nombre de semitons que hi ha entre dues notes. Un interval es pot descriure amb els adjectius *major*, *menor*, *just* o *justa*, *disminuït* o *disminuïda* o *augmentat* o *augmentada* (per exemple, *interval major*, *sexta menor*, *quarta justa* o *sèptima disminuïda*), tot i que a vegades l'adjectiu es pot ometre (especialment quan parlem dels intervals d'octava, quarta o quinta, en què, si no s'especifica res, es considera que son justos).

### 3.1.1 L'equivalència d'octaves

En la música occidental, l'interval més important és l'**octava**, que està format per dues notes homònimes de dues escales consecutives. Per simplificar l'exposició considerarem l'interval format entre la primera nota d'una escala, que anomenem  $do$ , i la primera nota de l'escala següent, que anomenem  $do'$ .

La peculiaritat de l'interval d'octava és que la freqüència fonamental de la nota més aguda,  $do'$ , és el doble de la freqüència fonamental de la nota greu,  $do$ . Per tant, si analitzem l'espectre de freqüències d'aquestes dues notes, veurem el patró següent:

$$\text{Espectre}(do) = \{f, 2f, 3f, 4f, \dots\} \quad \text{i} \quad \text{Espectre}(do') = \{2f, 4f, 6f, 8f, \dots\},$$

on  $f$  és la freqüència fonamental del  $do$ . És a dir, l'espectre de freqüències del  $do'$  coincideix exactament amb la meitat de l'espectre del  $do$ . Aquesta coincidència fa que percebem totes dues notes com la mateixa (tot i que la segona la sentim més aguda) i, consegüentment, que rebin el mateix nom.

En efecte, la majoria de persones reconeix dues notes separades per un interval d'octava

com si fossin la mateixa nota. Per exemple, quan un home i una dona canten la mateixa melodia, l'home sovint la canta una octava més greu a causa de les seves característiques físiques. Tot i això, la majoria d'oients acostumen a percebre-ho com una sola melodia. Com hem dit, això es deu a la coincidència dels harmònics: si analitzem l'espectre conjunt de dues notes separades per una octava, trobarem que totes les freqüències són múltiples enters d'una fonamental  $i$ , per tant, percebem aquest so com una sola nota. Dit d'una altra manera, afegir l'octava no altera la distribució de l'espectre, sinó només les amplituds dels harmònics parells  $i$ , per tant, percebem una sola nota amb un timbre lleugerament diferent.

Així, doncs, a partir d'una sola escala cromàtica que comença al *do*, en podem definir una altra simplement doblant les freqüències de les notes o dividint-les entre dos. Qualsevol d'aquestes escales sonarà igual que l'escala cromàtica inicial (però més aguda o més greu). Aquest procés es pot repetir infinitament fins als límits de la percepció humana. El piano, un dels instruments amb registre (rang de notes que es poden tocar) més ampli, consta habitualment de set octaves més una tercera menor, i el rang de freqüències fonamentals va dels 27.5 Hz als 4186.01 Hz.

**Notació:** en la resta del text indiquem l'octava a la qual pertany una nota mitjançant un subíndex, i prenem com a referència el *la* amb una freqüència de 440 Hz com a  $la_4$ . D'aquesta manera, el *do* central del piano és  $do_4$  i el *do* més greu del piano,  $do_1$ .

### 3.1.2 Com es mesura un interval

Com hem descrit més amunt, l'interval és la diferència d'altura entre dues notes, la qual volem mesurar en termes de freqüències fonamentals. La percepció auditiva humana de la freqüència és logarítmica: sentim que hi ha la mateixa distància entre el  $la_4$  i el  $la_5$  que entre el  $la_5$  i el  $la_6$ , però entre els dos primers hi ha una diferència de 440 Hz, mentre que entre els dos segons la diferència és de 880 Hz. Per tant, donades dues notes amb freqüències fonamentals  $f_1$  i  $f_2$ , no podem simplement definir la diferència d'altura com a  $|f_1 - f_2|$ , ja que, si canviem d'octava multiplicant totes dues freqüències per  $2^k$ , on  $k \in \mathbb{Z}$ , la diferència d'altura es veurà alterada pel factor  $2^k$ .

En general, donades dues freqüències  $f_1$  i  $f_2$  amb  $f_1 > f_2$ , expressem l'interval que formen com la raó  $r = f_1/f_2$  (o bé  $f_1 : f_2$ ). Aquesta escala és multiplicativa, és a dir, per “sumar” dos intervals hem multiplicar-ne les raons i per “restar-los”, dividir-les. Per exemple, en una escala amb afinació justa (vegeu la secció 3.2.2), l'interval entre *do* i *mi* és de raó  $6/5$  i entre *mi* i *sol*, de  $5/4$ . Per tant, l'interval entre *do* i *sol* és de raó  $3/2$ . De la mateixa manera, per dividir un cert interval de raó  $r$  en  $m$  parts iguals, hem de considerar l'interval  $r^{1/m}$ , ja que si “sumem”  $m$  intervals d'aquesta raó obtenim  $r$ .

## 3.2 L'evolució de l'afinació de l'escala cromàtica

Tot seguit presentarem d'una manera molt resumida<sup>14</sup> l'evolució que va patir l'afinació de l'escala cromàtica fins arribar al *temperament igual*, el sistema d'afinació estàndard que

<sup>14</sup>Podem trobar explicacions més extenses sobre la construcció d'escales musicals a [1, 7, 13].

es fa servir avui dia. Aquesta evolució va estar marcada per l'objectiu d'aconseguir que els intervals de l'escala fossin consonants, és a dir, agradables a l'oïda.

Com ja hem esmentat, la concepció més bàsica de consonància de dues notes es troba en la raó de les seves freqüències fonamentals. Una explicació senzilla d'aquest fet és la següent: si dues notes es troben en una raó de  $p/q$ , aleshores la freqüència del  $q$ -èssim harmònic d'una coincidirà amb la del  $p$ -èssim harmònic de l'altra; a més, aquesta coincidència es repeteix de manera periòdica. Per exemple, pensem en les notes *do* i *sol* afinades de manera que formin un interval de quinta justa (és a dir, formant una raó de  $3/2$ ). En aquest cas, el segon harmònic del *sol* coincidirà amb el tercer del *do*; el quart del *sol*, amb el sisè del *do*, i així successivament. La part més important de l'espectre són els primers harmònics, ja que és la part més audible. Per tant, com més petits siguin els enters que defineixen la raó d'un interval, més coincidències trobarem a la part audible de l'espectre i, per tant, percebrem més consonància.

Tot i que els conceptes de *consonància* i *dissonància* són molt més complexos (en parlarem a la pròxima secció), ara per ara ens limitarem a associar-los a la coincidència dels harmònics, ja que els sistemes d'afinació que presentarem tot seguit estan basats en aquest principi.

### 3.2.1 L'afinació pitagòrica i l'espiral de quintes

Després de l'octava, la raó d'enters més important en la música occidental és  $3 : 2$ . Aquest interval s'anomena *quinta justa*. Els pitagòrics creien que una escala musical havia d'estar formada només per intervals d'octava i de quinta. Tot seguit, veiem com es construeix aquesta escala.

Posem per cas una nota amb una certa freqüència fonamental, com ara el  $do_4$ . La quinta del  $do_4$  és el  $sol_4$ , la qual s'obté multiplicant per  $3/2$  les freqüències de la primera nota. Mitjançant aquesta operació obtenim dues notes de l'escala. A partir del  $sol_4$ , en busquem la quinta fent el mateix i obtenim el  $re_5$ , que es troba a l'octava següent. Si dividim les freqüències del  $re_5$  entre dos, obtenim una nota més per a l'escala:  $re_4$ , a l'octava inicial. Repetim aquest procés i, buscant la quinta a partir del  $re_4$ , aconseguim el  $la_4$  i, posteriorment, el  $mi_5$ , que podem baixar una octava dividint entre dos les seves freqüències. Continuant aquest procés, dividint entre dos quan calgui, hem construït una successió de quintes ascendents a partir del  $do_4$ . Per fer-ho cap avall, cal fer el mateix. Dividint entre  $3/2$  les freqüències del  $do_4$  obtenim el  $fa_3$  (a l'octava inferior), que col·loquem a l'escala principal com a  $fa_4$  multiplicant per dos les freqüències d'aquesta nova nota. D'aquest  $fa_4$  baixem al  $si_b3$ ; després, al  $mi_b3$ , i així successivament. Observeu que, per obtenir les notes de l'octava original, cal multiplicar per dos les freqüències.

Es podria pensar que, si a partir del  $do_4$  repetim aquest procés suficients cops, en algun moment tornarem al  $do_4$  i tancarem el cicle, la qual cosa equivaldria a trobar un nombre natural  $n > 0$  tal que en multiplicar  $3/2$  per si mateix  $n$  cops obtinguéssim una potència de 2, diguem-ne,  $2^m$  amb  $m$  natural. Observem, però, que

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^m \quad \text{és equivalent a} \quad 2^{n+m} = 3^n,$$

i aquesta última equació no té solució, atès que equivaldria a trobar dues descomposicions d'un nombre en factors primers. Per tant, el procés de crear notes a partir de l'interval de quinta no es pot tancar mai i dona lloc a una successió infinita de notes que se sol representar amb una espiral (vegeu la figura 3.2)

L'escala pitagòrica construïda d'aquesta manera no és consistent, ja que només volem definir dotze notes per a una escala i en tenim infinites. Per resoldre aquest problema cal canviar la freqüència d'una de les notes de l'espiral per la del seu **enharmònic**.<sup>15</sup> D'aquesta manera es tanca l'espiral i s'obté el **cicle de quintes**. Vegem-ne un exemple:

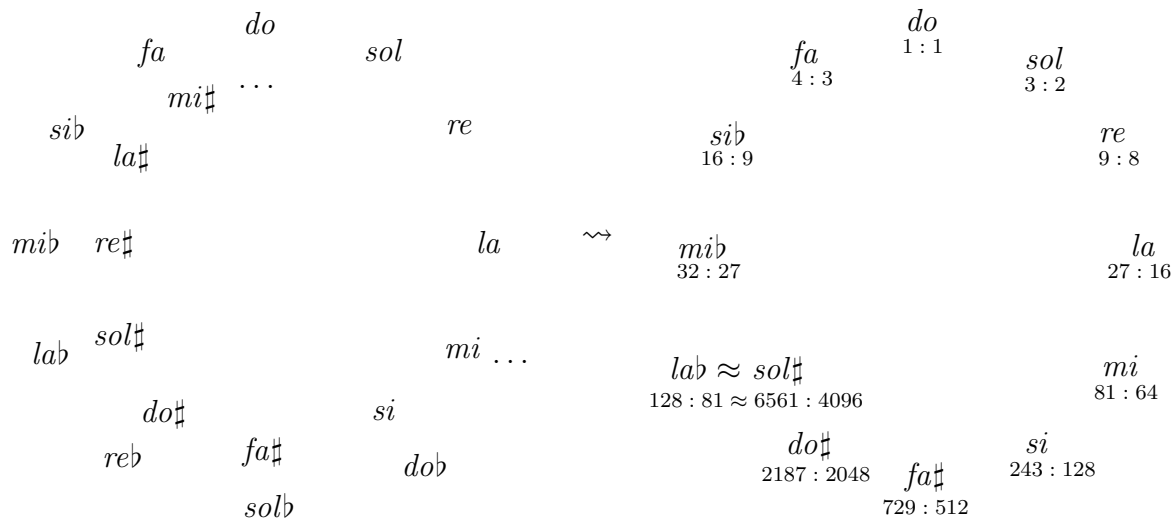


Figura 3.2: A la figura s'observa com tancar l'espiral de quintes (panell de l'esquerra) per obtenir el cicle de quintes (panell de la dreta, on hem fet explícites les raons dels intervals respecte *do*). En aquest cas, la freqüència del  $\text{sol}\sharp$  (amb raó 6561 : 4096) baixa per tal de ser igual a la freqüència del  $\text{lab}$  (amb raó 128 : 81).

En general, es tria una de les quintes i es redueix una mica, i així es forma el que s'anomena *quinta del llop*. Aquest interval difereix d'una quinta justa en una raó de  $3^{12}/2^{19}$ , la qual s'anomena *coma pitagòrica* i correspon a gairebé un quart de semitò temperat (vegeu la secció 3.2.3). Per tant, hi haurà una quinta que sempre ens sonarà desafinada: aquesta és la limitació més gran de l'afinació pitagòrica.

### 3.2.2 Afinació justa

Les escales d'afinació justa són l'evolució natural de l'afinació pitagòrica i es basen en la mateixa premissa: definir els intervals com una raó d'enters petits. Tanmateix, en aquest cas es consideren totes aquestes raons a partir d'una nota inicial, com ara *do*. Així, doncs, la

<sup>15</sup>En harmonia clàssica, es diu que dues notes són enharmòniques si tenen nom diferent però sonen igual, per exemple  $\text{mi}\flat$  i  $\text{re}\sharp$  o  $\text{la}\sharp$  i  $\text{si}\flat$ . Aquests parells de notes tenen la mateixa freqüència en una escala temperada.



quinta continua sent de raó  $3 : 2$  i el seu complementari respecte a l'octava, la quarta, de  $4 : 3$ . La tercera major té una raó de  $5 : 4$  i la sexta menor, de  $5 : 3$ . Finalment, la segona major correspon a la raó  $9 : 8$  i la setèma major, a  $15 : 8$ . Aquests intervals s'anomenen *purs*. Un cop afinades les notes de l'escala diatònica major, cal fer el mateix amb la resta de notes de l'escala cromàtica, per a la qual cosa hi ha diverses propostes, les quals no exposarem aquí.

Cal fer un incís en aquesta discussió: tots aquests intervals estan calculats respecte a una nota fonamental, com ara *do*, però això no vol dir que, per exemple, totes les quintes tinguin raó  $3 : 2$ . Si considerem la quinta formada entre *re* i *la*, té una raó de  $40 : 27 \approx 1.48$ , que correspon a dividir la raó del *la*,  $5 : 3$ , entre la raó del *re*,  $9 : 8$ . En aquest cas, aquesta quinta és més baixa que la formada entre *do* i *sol*, que és justa, amb raó  $3 : 2 = 1.5$ . Aquest fet fa que, si bé a partir de *do* tots els intervals són molt més consonants que en l'escala pitagòrica, a partir d'altres notes no ho són. D'aquesta manera, si toquem una obra que està escrita en la tonalitat<sup>16</sup> de *do* major, hi haurà més intervals que sonaran consonants que si en toquem una en *re* major, en què la quinta no és justa, com ja s'ha vist en l'exemple anterior. Com que no és factible tenir una afinació per a cada tonalitat i, a més, una mateixa obra pot canviar de tonalitat al llarg del discurs musical, sorgeixen el que s'anomenen **temperaments**, que són modificacions dels intervals de l'escala d'afinació justa per tal de millorar-ne l'afinació. Un dels exemples més coneguts és el temperament igual, que descriurem tot seguit.

### 3.2.3 Temperament igual

El concepte de **temperament igual** apareix per definir una escala que pugui ser utilitzada en qualsevol tonalitat. Per aconseguir-ho, es divideix l'octava en dotze parts iguals i, a partir d'aquí, es creen tots els intervals.

En efecte, si partim de l'octava, de raó  $2$ , i la dividim en dotze parts iguals, obtenim el **semitò temperat**, de raó  $2^{1/12}$ . A partir d'aquest interval construïm totes les notes de l'**escala temperada**, que tenen raons  $2^{k/12}$ , amb  $k = 0, 1, \dots, 11$ , respecte a la primera nota de l'escala ( $k = 12$  correspon a l'octava, la primera nota de l'escala següent).

En aquest cas, la quinta deixa de tenir raó  $3/2$  per passar a tenir raó  $2^{7/12}$ . Pel que fa a altres intervals, passa una cosa semblant. L'afinació temperada sacrifica les quintes justes en rebaixar-les lleugerament i també altres intervals purs, com ara les terceres, que queden més afectades. A canvi, s'obté una afinació acceptable per a totes les tonalitats. Aquest és un sistema d'afinació prou bo, ja que és relativament proper als intervals justos i permet tocar en qualsevol tonalitat sense perdre qualitat en l'afinació (a la secció següent veurem com podem mesurar això). Per tot plegat, actualment es considera que el sistema d'afinació estàndard és el temperament igual.

---

<sup>16</sup>En música, el concepte de *tonalitat* fa referència a una organització jeràrquica de les notes d'una escala en relació amb una nota de referència. Per denominar una tonalitat es fa servir el nom de la nota de referència seguit d'un adjectiu (típicament *major* o *menor* en funció dels intervals amb més importància harmònica).

## 4 Teoria de la dissonància

A les seccions anteriors hem vist que la propietat fonamental que defineix un so musical és que les freqüències de l'espectre són múltiples enters d'una freqüència fonamental. A més, hem analitzat quines conseqüències té aquest fet si considerem una noció bàsica de consonància (associada a intervals en raó d'enters petits), i com això es té en compte a l'hora d'escollir un conjunt finit de sons per formar l'escala cromàtica, que és la base de la gran majoria de la música occidental.

En aquesta secció introduïrem la teoria de la dissonància, que ens permetrà fer una anàlisi de manera més profunda de per què uns intervals sonen de manera més agradable que altres, i com es pot quantificar aquesta qualitat. Això ens permetrà justificar per què l'escala temperada és una bona elecció pel que fa a la dissonància i, d'aquesta manera, podrem donar una resposta més completa a per què ens agrada la música que fa servir el temperament igual. Per a una exposició més completa, podeu consultar [13].

### 4.1 Superposició de dues ones simples. Batecs i aspror

Al llarg de la història de la música, els termes *consonància* i *dissonància* s'han definit de diverses maneres, algunes de les quals són imprecises. No va ser fins al segle XIX que Hermann von Helmholtz [9] va donar una explicació científica i més rigorosa del concepte de *dissonància* a partir de l'anàlisi de dues ones simples superposades. Com Helmholtz va observar, quan sentim alhora dues ones simples amb la mateixa freqüència, si la freqüència d'una va augmentant progressivament, passem de sentir batecs a aspror i, després, percebem les dues ones com a tons diferents. Tot seguit, desenvoluparem aquestes idees.

Considerem una ona simple  $v_0(t) = \sin(2\pi f_0 t)$  amb una freqüència  $f_0$  fixada. Volem estudiar el resultat de superposar aquesta ona i una altra de la forma  $v(t) = \sin(2\pi f t)$ , amb una freqüència  $f$  que farem variar. Per fer-ho, hem de considerar la suma de totes dues i, mitjançant identitats trigonomètriques, obtenim que l'ona resultant és:

$$V(t) = v_0(t) + v(t) = 2 \cos\left(2\pi \frac{f - f_0}{2} t\right) \sin\left(2\pi \frac{f + f_0}{2} t\right).$$

En aquest cas,  $V(t)$  es pot interpretar com una ona simple que vibra amb freqüència  $\frac{f+f_0}{2}$  i amb una amplitud que varia amb freqüència  $\frac{f-f_0}{2}$ , com es pot veure a la figura següent:

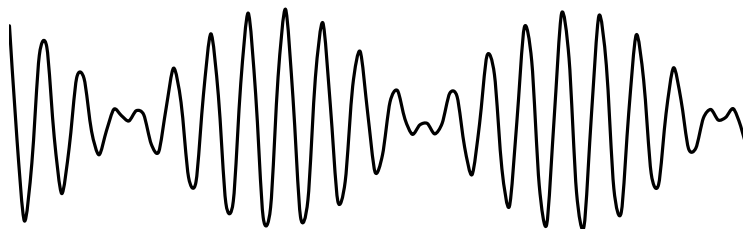


Figura 4.1: Dues ones simples superposades.

Si la freqüència  $f$  és prou propera a  $f_0$ , percebem un to de freqüència  $\frac{f_0+f}{2} \approx f_0$  amb un volum que oscil·la. Aquesta variació en l'amplitud és el que es coneix com a **batecs**, la freqüència dels quals és  $f_b = \frac{|f-f_0|}{2}$ , és a dir, se senten  $f_b$  batecs per segon. Com que el valor de  $f$  és proper a  $f_0$ ,  $f_b$  és petit i els batecs es poden sentir clarament. Si fem variar  $f$ , a mesura que aquesta freqüència s'allunya de  $f_0$ , el valor de  $f_b$  es farà més gran i sentirem batecs cada cop més ràpids. D'aquesta manera, el so és cada cop menys agradable i provoca una sensació d'**aspror** que augmenta fins a un punt màxim a partir del qual comença a desaparèixer i percebem el so com a dos tons diferents de freqüències  $f_0$  i  $f$ .

A partir d'aquest fet podem donar una noció més precisa del concepte de *dissonància* entre dos tons purs: la màxima consonància es correspon amb l'absència de batecs, mentre que la màxima dissonància es correspon amb el punt màxim d'aspror. Com podem veure, ni la dissonància ni la consonància són aspectes absoluts del so; és a dir, un parell de sons no pot ser només consonant o dissonant, sinó que pot ser més consonant o més dissonant que d'altres.

Aquesta noció de dissonància explica per què dues notes sonen més consonants si l'interval que formen és una raó d'enters petits: com que coincideixen molts harmònics, no hi ha batecs ni aspror. A més, ens permet entendre com, fins i tot sense tenir estudis musicals, les persones són capaces d'identificar quan algú afina o no. Imaginem una persona que està cantant i s'acompanya amb un piano perfectament afinat. Si la persona canta una nota la freqüència de la qual "xoca" amb les freqüències de l'instrument, la nostra oïda percebrà aspror i ens semblarà que està desafinant. Si, en canvi, la persona canta una nota amb una freqüència que no interfereix amb les freqüències del piano, no sentirem aspror i considerarem que està afinant.

## 4.2 Com mesurar la dissonància

Als anys seixanta, Reinier Plomp i Willem Johannes Maria Levelt van dur a terme un experiment per tal de mesurar la dissonància [12]. Van fer sentir parells de tons purs a diverses persones, que els havien d'associar a un nombre entre 0 i 1, fent correspondre 0 amb la màxima consonància i 1, amb la màxima dissonància. Amb aquestes dades volien obtenir un gràfic que il·lustrés la dissonància de dos tons en funció de la diferència de les seves freqüències. El resultat va ser una corba com la de la figura 4.2. Es va observar que el punt màxim de dissonància era al voltant de mig semitò temperat.

A partir de les dades obtingudes es pot construir una funció que s'ajusti prou bé a

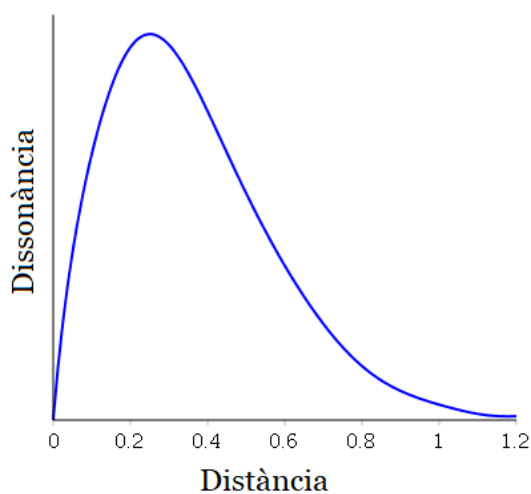


Figura 4.2: Dissonància de dos tons purs com a funció de la seva distància (mesurada en tons temperats).

aquesta corba i que permeti mesurar quantitativament la dissonància entre tons purs. És a dir, podem definir una funció que, donats dos tons simples, calculi la dissonància que hi ha entre tots dos. L'anomenarem **funció de dissonància**. Per descriure-la d'una manera més formal, considerarem un to  $t$  com un parell  $t = (f, a)$ , on  $f$  és la freqüència del to i  $a$ , l'amplitud. Tenint en compte aquesta definició, donats dos tons  $t_1$  i  $t_2$ , en denotarem la dissonància com  $d(t_1, t_2)$ . En aquest treball no ens interessa l'expressió concreta d'aquesta funció, només cal entendre què representa; podeu trobar fórmules explícites per a la funció que interpola la corba de la figura 4.2 i per a  $d$  a [13, Apèndix E].

Ara bé, l'objectiu de Plomp i Levelt era analitzar la dissonància de tons complexos, com les notes produïdes per instruments, que estan formades per la superposició de tons simples. Per fer-ho, van suposar que la dissonància era additiva i que, en conseqüència, la suma de les dissonàncies entre els diferents harmònics de dues notes era la dissonància total. En general, donat un conjunt de tons purs  $\mathcal{T} = \{t_1, t_2, \dots\}$ , la **dissonància total** d'aquests és definida per:

$$D_T(\mathcal{T}) := \sum_{\substack{t_i, t_j \in \mathcal{T} \\ i < j}} d(t_i, t_j).$$

En aquest cas, donades dues notes  $\mathcal{N} = \{t_1, t_2, \dots\}$  i  $\tilde{\mathcal{N}} = \{\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \dots\}$ , definides a partir del seu espectre (que està format per les freqüències i amplituds dels tons de què es compon la nota), definim la dissonància entre les dues com

$$D(\mathcal{N}, \tilde{\mathcal{N}}) := D_T(\mathcal{N} \cup \tilde{\mathcal{N}}), \quad \text{on } \mathcal{N} \cup \tilde{\mathcal{N}} = \{t_1, \tilde{t}_1, t_2, \tilde{t}_2, \dots\}.$$

És a dir, per mesurar la dissonància entre dues notes considerem la unió dels dos espectres i en calculem la dissonància total.

Com podem comprovar, aquesta definició de *dissonància d'un interval* està directament relacionada amb l'espectre de les notes que el formen. Vegem, tot seguit, la informació que ens aporta la funció de dissonància per a un espectre harmònic i quina relació té amb els sistemes d'afinació definits anteriorment.

### 4.3 Corbes de dissonància

Considerem una nota de freqüència fonamental  $f$  amb un espectre harmònic. És a dir,  $\mathcal{N} = \{(f, a_1), (2f, a_2), (3f, a_3), \dots\}$ , on les amplituds de cada freqüència estan determinats per les característiques de l'instrument que produeixi la nota. En considerar un interval de raó  $r$  a partir d'aquesta nota, obtenim una nota nova en què totes les freqüències de l'espectre estan multiplicades per  $r$ :  $\mathcal{N}(r) = \{(rf, a_1), (2rf, a_2), (3rf, a_3), \dots\}$ . Si fixem la freqüència fonamental  $f$  i els valors  $a_j$ , podem considerar la funció següent:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} : [1, 2] &\rightarrow \mathbb{R} \\ r &\mapsto D(\mathcal{N}, \mathcal{N}(r)). \end{aligned}$$

Noteu que aquesta funció ens calcula la dissonància d'un interval de raó  $r$ , on  $r$  va des d'1, que correspondria a l'uníson, fins a 2, que correspondria a l'octava. Si representem la funció  $r \mapsto \mathcal{D}(r)$  en una gràfica, obtenim la **corba de dissonància**:

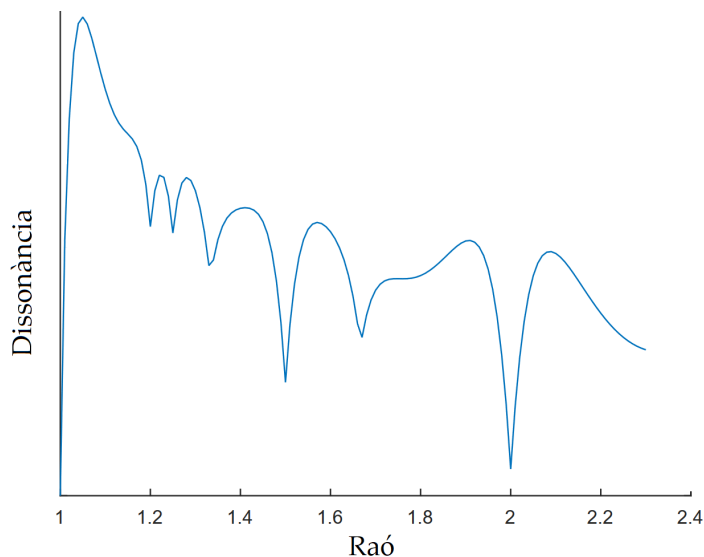


Figura 4.3: Corba de dissonància per a notes amb sis harmònics (tots amb la mateixa amplitud).

Els mínims d'aquesta gràfica representen intervals de dissonància mínima. Si els comparem amb els intervals purs de raons  $5 : 4$ ,  $6 : 5$ ,  $4 : 3$ ,  $3 : 2$ ,  $5 : 3$  i  $2 : 1$  (que corresponen, respectivament, als intervals de tercera menor, tercera major, quarta justa, quinta justa, sexta major i octava), observem el següent:

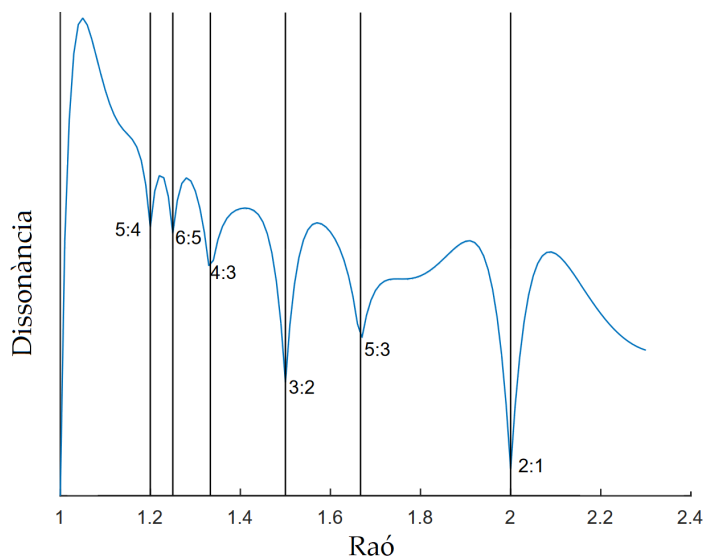


Figura 4.4: Disposició dels intervals purs a la gràfica de dissonància. S'observa que coincideixen amb els mínims de la funció de dissonància.

Veiem doncs que l'afinació justa s'adapta perfectament a aquest gràfic i en redueix la dissonància. El fet d'obtenir aquesta corba i observar que encaixava amb els intervals que

clàssicament es consideraven consonants va ser precisament el resultat més important de l'article de Plomp i Levelt [12].

Com ja hem comentat, l'afinació justa té diversos inconvenients que fan que en molts casos no sigui adequat fer-la servir. Vegem ara la relació entre l'afinació a temperament igual i la gràfica de dissonància, en la qual hem marcat les dotze notes de l'escala:

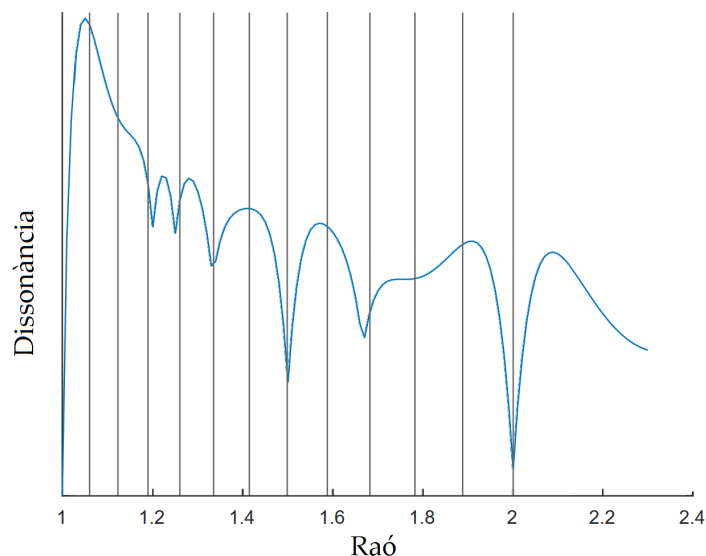


Figura 4.5: Disposició de les notes de l'escala temperada a la gràfica de dissonància.

Podem observar que, tot i que l'escala temperada no assoleix exactament els mínims de la gràfica de dissonància, ens en dona una molt bona aproximació. És per aquesta raó que la música feta amb aquesta escala (que, com hem dit, avui dia es considera l'afinació estàndard) ens resulta agradable a l'oïda.

En conclusió, la teoria de la dissonància està basada en experiments directament relacionats amb la nostra oïda i ens proporciona una eina per mesurar la dissonància dels sons. Aquesta mesura permet donar una justificació més precisa de la consonància dels intervals justos i mesurar la qualitat de l'afinació temperada.

#### 4.4 Més enllà de l'espectre harmònic

Com hem vist, l'espectre de les notes és el que determina quins són els intervals de mínima dissonància. En el cas de les notes musicals, el seu espectre (format per freqüències que són múltiples enters d'una altra freqüència) té una distribució tan característica que fa que els intervals formats per una raó d'enters petits siguin mínims de la funció de dissonància. Per aquest motiu, quan sentim aquests intervals tenim una sensació més agradable a l'oïda.

Ara bé, la funció de dissonància que hem construït a la secció anterior també es pot fer servir per analitzar sons amb qualsevol mena d'espectre. I, tot i que la majoria dels instruments que coneixem tenen un espectre harmònic (o quasi), n'hi ha que no. En aquest cas, és possible que no tingui sentit fer servir l'afinació tradicional i que n'hi hagi una altra

els intervals de la qual s'ajustin més als mínims de la gràfica de dissonància per a aquest espectre no harmònic.

Un exemple d'aquest fet s'observa en l'afinació del piano. A diferència del que passa amb un violí o una guitarra, les cordes del piano tenen una rigidesa que no és negligible. Per tant, si es vol fer una anàlisi acurada del moviment de les cordes del piano, cal afegir un terme a l'equació d'ones que tingui en compte aquesta característica. En aquest cas, si resollem la nova equació, es pot comprovar que l'espectre de freqüències segueix una distribució de la forma

$$f_n = nf_0\sqrt{1 + Bn^2}, \quad \text{amb } n = 1, 2, \dots,$$

on  $f_0 = c/2L$  (els paràmetres  $c$  i  $L$  estan definits a la secció 2) i  $B$  és un paràmetre que depèn de la rigidesa de la corda. És a dir, tenim un espectre lleugerament “dilatat” respecte a l'harmònic. Si considerem aquest espectre a l'hora de representar la gràfica de dissonància, veurem que els mínims estan lleugerament desplaçats en relació amb la gràfica d'un espectre harmònic.

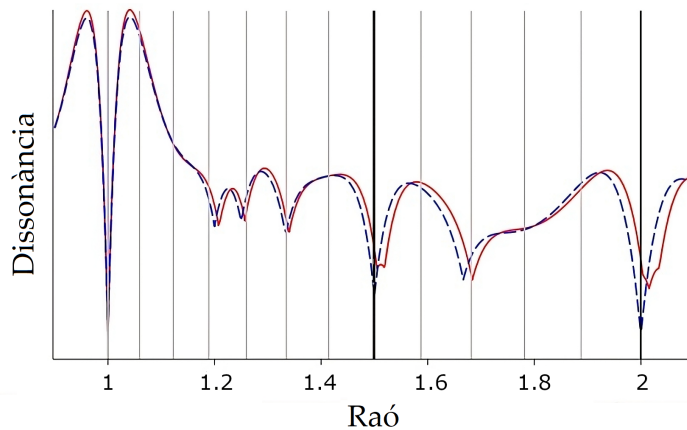


Figura 4.6: Comparació entre les corbes de dissonància d'un espectre harmònic (en blau i línia discontinua) i de l'espectre d'una corda amb rigidesa com la del piano (en vermell i línia contínua). Les línies grises verticals marquen la distribució de les notes d'una escala de temperament igual; la quinta justa i l'octava les hem marcat en negre i amb línies més gruixudes perquè es puguin distingir més bé.

Aquest fet suggereix una afinació diferent de l'estàndard, amb les octaves una mica per sobre de la raó 2 : 1, en cas que el paràmetre  $B$  no sigui negligible, com per exemple passa al registre agut del piano. En efecte, si mesurem les freqüències d'un piano que ha estat afinat per un afinador professional, veurem que a mesura que ens allunyem de la part central del piano l'afinació “s'estira” lleugerament. Podeu trobar una explicació més detallada d'aquest fet a [8], on, a banda d'analitzar l'espectre del piano, es fa una proposta d'afinació basada en la teoria de la dissonància.

Per acabar, fixem-nos que la teoria de la dissonància també ens dona una eina creativa molt útil. Imaginem que hem sintetitzat un so amb un espectre concret que ens agrada per les seves característiques sonores. El més habitual seria afinar les freqüències fonamentals

amb l'afinació estàndard i, a partir d'aquí, fer música. No obstant això, si l'espectre del so no és harmònic, és molt possible que obtinguem intervals dissonants. Per millorar aquest aspecte, podem representar la gràfica de dissonància i, a partir dels mínims, construir una escala al màxim de consonant possible per a aquest so sintetitzat.

## **Agraïments**

L'autor és membre del grup de recerca 2017 SGR 01392 i ha rebut finançament dels projectes MTM2017-84214-C2-1-P, RED2018-102650-T i EP/S03157X/1. L'autor agraeix a Alba Pérez els suggeriments per millorar la qualitat lingüística del document.



## Bibliografia

- [1] Dave Benson, *Music: A mathematical offering*, Cambridge University Press, 2006.
- [2] Carl B. Boyer i Uta C. Merzbach, *A history of mathematics*, John Wiley & Sons, 2011.
- [3] Florian Cajori, *A history of mathematics*, vol. 303, American Mathematical Soc., 1999.
- [4] Jean le Rond d'Alembert, *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration. i-ii, hist*, Acad. Berlin (1747), 214–249.
- [5] Leonhard Euler, *Sur la vibration des cordes*, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin (1750), 69–85.
- [6] Jean Baptiste Joseph baron Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, F. Didot, 1822.
- [7] Joan Girbau, *Les matemàtiques i les escales musicals*, Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques **18** (1985), 3–27.
- [8] Xavier Gràcia i Tomás Sanz-Perela, *The wave equation for stiff strings and piano tuning*, Reports @SCM **3** (2017), 1–16.
- [9] Hermann von Helmholtz, *On the sensations of tones*, Dover Pubs., 1877.
- [10] Joseph-Louis de Lagrange, *Recherches sur la nature et la propagation du son*, Miscellanea Taurinensia **1** (1759), 39–148.
- [11] Peter G. Lejeune-Dirichlet, *On the convergence of trigonometric series which serve to represent an arbitrary function between two given limits*, Journal fur die reine und angewandte Mathematik **4** (1829), 157–169.
- [12] Reinier Plomp i Willem Johannes Maria Levelt, *Tonal consonance and critical bandwidth*, The journal of the Acoustical Society of America **38** (1965), no. 4, 548–560.
- [13] William A. Sethares, *Tuning, timbre, spectrum, scale*, Springer Science & Business Media, 2005.
- [14] Walter A. Strauss, *Partial differential equations: An introduction*, John Wiley & Sons, 2007.
- [15] Gerald F. Wheeler i William P. Crummett, *The vibrating string controversy*, American Journal of Physics **55** (1987), no. 1, 33–37.

T. Sanz-Perela, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID, CIUDAD UNIVERSITARIA DE CANTOBLANCO, 28049 MADRID, SPAIN  
tomas.sanz@uam.es