

Índex

Introducció	xi
1 El model probabilístic	1
1.1 Fenòmens aleatoris	1
1.2 Espais de probabilitat	2
1.2.1 Propietats de la probabilitat	4
1.2.2 Espais de probabilitat finits	8
1.3 La combinatòria en el càlcul de probabilitats	10
1.4 Alguns exemples de models probabilístics	13
1.4.1 Problema de l'escrutini	14
1.4.2 Una paradoxa de Bertrand	17
1.5 Probabilitat condicionada	20
1.5.1 Urnes de Pólya	23
1.5.2 Inversió de les condicions: fórmula de Bayes	25
1.6 Esdeveniments independents	27
1.6.1 Propietats dels esdeveniments independents	27
Exercicis	31
2 Variables i vectors aleatoris	35
2.1 Variables aleatòries	35
2.2 Llei d'una variable aleatòria	41
2.3 Variables aleatòries discretes	49
2.4 Exemples de variables aleatòries discretes	50

2.4.1	Variable aleatòria de Bernoulli	50
2.4.2	Variable aleatòria binomial	51
2.4.3	Variable aleatòria geomètrica	52
2.4.4	Variable aleatòria binomial negativa	52
2.4.5	Variable aleatòria hipergeomètrica	54
2.4.6	Variable aleatòria de Poisson	56
2.5	Variables aleatòries absolutament contínues	57
2.6	Exemples de variables aleatòries absolutament contínues	58
2.6.1	Llei uniforme	59
2.6.2	Llei exponencial	59
2.6.3	Llei normal estàndard	61
2.6.4	Llei Gamma	62
2.7	Densitat de transformacions de variables aleatòries	63
2.8	Vectors aleatoris	66
2.9	Densitat de transformacions de vectors aleatoris	73
2.10	Variables aleatòries independents	74
2.11	Distribucions condicionades	79
	Exercicis	83
3	Esperança matemàtica	87
3.1	Esperança matemàtica de variables aleatòries simples	87
3.2	Esperança matemàtica de variables aleatòries no negatives	90
3.3	Variables aleatòries amb esperança matemàtica finita	91
3.4	Càcul d'esperances matemàtiques	93
3.4.1	Variables aleatòries discretes	94
3.4.2	Variables aleatòries absolutament contínues	95
3.5	Esperança matemàtica de funcions de variables aleatòries	99
3.6	Moments de variables aleatòries	101
3.6.1	Moments d'ordre k	101
3.6.2	Desigualtats	103
3.7	Independència de variables aleatòries i moments	105
3.8	Regressió lineal	111

3.9	Funcions generatrius	112
3.9.1	Generalitats	113
3.9.2	Càlcul d'algunes funcions generatrius	114
3.9.3	Funcions generatrius i càlcul de moments	116
3.10	Funcions generatrius de moments	118
	Exercicis	119
4	Successions de variables aleatòries	123
4.1	Lemes de Borel-Cantelli	124
4.2	Convergència quasi segura	129
4.3	Convergència en probabilitat	134
4.4	Convergència en mitjana d'ordre p	139
4.5	Convergència en llei	141
4.6	Relacions entre els diferents tipus de convergències i aplicacions	149
	Exercicis	160
5	Lleis dels grans nombres	165
5.1	Lleis febles dels grans nombres	166
5.2	Lleis fortes dels grans nombres	171
5.2.1	Llei forta dels grans nombres per a variables incorrelacionades	172
5.2.2	Llei forta dels grans nombres de Kolmogorov	175
	Exercicis	184
6	El teorema del límit central	187
6.1	Convergència de la llei binomial	188
6.2	El teorema del límit central de Lévy-Lindeberg	190
6.3	Algunes aplicacions del teorema del límit central	197
6.3.1	Una demostració de la llei feble dels grans nombres de J. Bernoulli	197
6.3.2	Estimació de l'error comès en aproximar la freqüència relativa per la probabilitat	197

6.3.3	Determinació del nombre d'enquestats necessaris per obtenir resultats fiables	198
6.3.4	Errors en les mesures físiques	199
6.4	Apèndix	200
	Exercicis	202
A	Simulació de variables aleatòries	205
A.1	Generadors de nombres aleatoris	205
A.2	Mètodes generals per a la simulació de variables aleatòries	207
A.2.1	Mètode de la transformació inversa	207
A.2.2	Mètode de composició	209
A.2.3	Mètode d'acceptació-rebuig	210
A.3	Simulació d'algunes variables aleatòries particulars	211
A.3.1	Simulació de la distribució binomial	211
A.3.2	Simulació de la llei de Poisson	211
A.3.3	Simulació de la llei $\mathcal{N}(0, 1)$	212