Les possibilitats de fer diana amb trajectòries a l'atzar (*)

Marta Sanz-Solé (**)
Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona
Gran Via de les Corts Catalanes 585
E-08007 Barcelona, Spain
marta.sanz@ub.edu
http://www.mat.ub.es/∼sanz

Resum: Introduïm la noció de probabilitat de fer diana amb un camp aleatori i expliquem com es podem obtenir estimacions a partir de conceptes de la teoria geomètrica de la mesura, com la capacitat de Bessel-Riesz i la mesura de Hausdorff. Després apliquem aquests resultats a exemples donats per sistemes d'equacions en derivades parcials estocàstiques, tot i fent una breu introducció a aquest tema.

Paraules clau: Probabilitat de fer diana; equacions en derivades parcials estocàstiques; capacitat; mesura de Hausdorff.

AMS Subject Classifications. Primary: 60H15, 60J45; Secondary: 60G15, 60G45

(*) Conferència inaugural de la Societat Catalana de Matemàtiques, curs 2009-20010.

(**) Amb el suport parcial del projecte MTM 2009-07203 de la *Dirección General de Investigación, Ministerio de Ciencia e Innovación, Spain.*

1 Introducció

El concepte de funció és bàsic per descriure models per l'evolució de fenòmens obsevables en el marc de teories deterministes. Un anàleg d'aquesta noció en la teoria de la probabilitat és la de *camp aleatori* o *procés estocàstic.* Restringim-nos al cas de dimensió finita, un *camp aleatori* es definexi com una aplicació mesurable $v : \Omega \times \; R^m \to \mathbb{R}^d$, on Ω és l'espai mostral, on pertany l'argument d'atzar. Les observacions, i per tant les dades rellevants per l'estudi numèric o el tractament estadístic, entre altres objectius, estan formades per les funcions obtingudes en fixar $\omega \in \Omega$. És a dir, per la col.lecció de funcions

$$v(\omega) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d, \; \omega \in \Omega,$$

que s'aomenen les *trajectòries* del camp aleatori.

En aquest article ens plantegem analitzar una qüestió que, de manera ingènua, podem formular així: Fixat un conjunt A, cuàntes trajectòries el visitaran? El terme *cuàntes* és pot fer més precís reformulant la pregunta així: Quina és la probabilitat del conjunt

$$\{\omega \in \Omega : v(\omega)(\mathbb{R}^m) \cap A \neq \emptyset\}? \tag{1}$$

D'ara en endavant, anomenarem *probabilitat que v visiti A* a la probabilitat de fer diana en A amb el camí aleatori v, o sigui a la probabilitat del conjunt (1).

En la teoria probabilista del potencial, l'estudi d'aquestes probabilitats és un problema freqüent i important. Aquesta teoria, a cavall entre l'anàlisi i la probabilitat, té com a objectiu més visible la utilització de tècniques probabilistes, majorment de la teoria de martingales, per l'estudi de les solucions d'equacions en derivades parcials de tipus el.liptic. El cas més conegut, és el de l'equació de Laplace $\Delta u = 0$ sobre un domini afitat, on $\Delta = \sum_{i=1}^m \partial^2_{x_i x_i}$. Però l'anàlisi de probabilitats d'aquest tipus és també un tema important en altres camps, per exemple, en la teoria dels processos de Markov, per la determinació d'estats recurrents (els que es visiten amb molta insistència) o transitoris (aquells pels que es passa de llarg), en l'estudi de propietats geomètriques dels processos estocàstics o en la mecànica estadística, per citar-ne alguns.

Per entrar en una formulació més precisa, fixem un conjunt compacte $I \subset \mathbb{R}^m$, amb mesura de Lebesgue positiva, i un conjunt A de la σ-àlgebra de Borel de $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Ens plantegem establir fites superiors i inferiors de $P\{v(I) \cap A \neq \emptyset\}$, en termes de propietats de A expressades mitjançant nocions de la teoria geomètrica de la mesura, com ara la capacitat i la mesura de Hausdorff. En particular, volem determinar si un conjunt A és *polar*, és a dir, si $P\{v(I) \cap A \neq \emptyset\} = 0$. Els conjunts polars juguen un paper important en la determinació de solucions maximals positives d'equacions en derivades parcials el.líptiques.

L'article s'estructura en tres seccions. A la Secció 2, presenten les nocions fonamentals que utilitzarem al llarg de l'exposició i alguns dels resultats coneguts. A la Secció 3, describim criteris generals per l'estudi de les probabilitats de fer diana. A la Secció 4, apliquem aquests criteris a exemples d'equacions en derivades parcials estocàstiques, tot i fent prèviament una introducció a aquest tema. Finalment, a la Secció 5, donem algunes idees per l'aplicació dels criteris a exemples més complexos i donem perspectives de treball futur. Una bona part d'aquest article es basa en [13].

2 Resultats previs

Per un millor nivell de comprensió, describim tot seguit dos casos particulars de les nocions de *capacitat* i *mesura de Hausdorff* que utilitzarem al llarg de l'exposició. Una presentació més extensa pot trobar-se en [19], [20].

Per $\beta, r \in \mathbb{R}$, definim el nucli de *Bessel-Riesz*

$$K_\beta(r) = \begin{cases} r^{-\beta}, & \beta > 0, \\ \log_+\left(\frac{1}{r}\right), & \beta = 0, \\ 1, & \beta < 0. \end{cases}$$

Considerem ara un conjunt E de la σ-àlgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ i una probabilitat μ amb suport en E. Definim l'*energia* de μ com

$$I_\beta(\mu) = \int_E \int_E K_\beta(\|x-y\|)\mu(dx)\mu(dy).$$

Aleshores, la *capacitat de Bessel-Riesz* del conjunt E és defineix mitjançant la fórmula

$$\mathrm{Cap}_\beta(E) = \left[\inf_{\mu \in \mathcal{P}(E)} I_\beta(\mu)\right]^{-1}.$$

Per exemple, si E consisteix a un únic element i $\beta \geq 0$, és facil veure per càlculs directes que $\mathrm{Cap}_\beta(E) = 0$. Per tant, un conjunt *petit*, com ara un singletó, té capacitat *petita*.

Per $\beta \in [0, \infty[$ i $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, definim la mesura de Hausdorff per l'expressió

$$\mathcal{H}_\beta(E) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (2r_i)^\beta : E \subset \cup_{i=1}^{\infty} B_{r_i}(x_i), \sup_{i \geq 1} r_i \leq \varepsilon \right\}.$$

És a dir, considerem recobriments del conjunt E per boles de radis inferiors o iguals a ε, sumem tots els diàmetres d'aquestes boles elevats a β , considerem l'ínfim de les sumes per tots els recobriments possibles i, finalment, fem tendir ε a zero. Per $\beta \in]-\infty, 0[$, definim $\mathcal{H}_\beta(E) = \infty$.

Per exemple, per $\beta = 0$, $\mathcal{H}_\beta$ és la mesura comptadora i per $\beta \in \mathbb{Z}_+ - \{0\}$, és la mesura de Lebesgue.

Bé que aparentment ambdós conceptes semblen ben diferents, de fet estan relacionats. Així, un resultat de Frostman estableix que si E és un conjunt compacte, $\beta_1 > \beta_2 > 0$ i $\mathrm{Cap}_{\beta_1}(E) > 0$, alehores també $\mathcal{H}_{\beta_1}(E) > 0$; endemés aquesta darrera propietat implica $\mathrm{Cap}_{\beta_2}(E) > 0$ (vegeu [20]).

Exemples

Les probabilitats de visita a un conjunt A han estat estudiades per un bon nombre de processos estocàstics. El cas més clàssic és el del moviment brownià. El *moviment brownià* o procés de Wiener d-dimensional, que denotarem per $\{B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^d), t \in \mathbb{R}_+\}$, és un procés amb components independents gaussians, centrats i amb funció de covariancia $E(B_t^i B_s^i) = \min(s,t)$. Això vol dir que cada component $\{B_t^i, t \in \mathbb{R}_+\}$, $i = 1, \ldots, d$, és un procés estocàstic tal que la llei del vector format per un nombre finit i arbitrari de variables aleatòries obtingudes en fixar valors diferents del paràmetre t, és normal multidimensional amb mitjana zero i covariancies tal com acabem d'especificar. Llevat d'un conjunt de probabilitat zero, les trajectòries del moviment brownià són funcions contínues, però en canvi, no són derivables en cap punt. Són doncs molt irregulars.

Les probabilitats de fer diana amb el moviment brownià van ser estudiades primer per Kakutani [23], i més tard per Dvorestzky [15], que van establir el resultat següent.

Theorem 2.1 *Sigui A un subconjunt comparte de $\mathbb{R}^d$. Existeixen dues constants positives c_1, c_2 tals que*

$$c_1\, Cap_{d-2}(A) \leq P(B(\mathbb{R}_+) \cap A \neq \emptyset) \leq c_2\, Cap_{d-2}(A). \tag{2}$$

En altres paraules,

$$P(B(\mathbb{R}_+) \cap A \neq \emptyset) > 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Cap}_{d-2}(A).$$

En particular, degut a que la β-capacitat d'un singletó és zero si $\beta \geq 0$, resulta que les trajectòries d'un moviment brownià assoleixen un nivel prefixat $x \in \mathbb{R}$ amb probabilitat positiva si, i únicament si, $d = 1$.

La demostració d'aquest teorema es basa en la propietat de Markov del moviment brownià i en les tècniques pròpies de l'anàlisi d'aquesta propietat.

Un procés de Markov presenta una *falta de memòria*, en el sentit que el futur i el passat descrits pel procés són condicionalment independents respecte del present.

Existeixen a la literatura resultats més o menys similars al Teorema 2.1 per a processos de Markov més generals que el moviment brownià (vegeu [2], [17], [18]), per a processos de Lévy ([1]), per a processos Gaussians amb increments no estacionaris ([43], [3]). També per processos a valors en espais de mesures, que s'obtenen com a límit de processos de ramificació (evolucions de poblacions) i s'anomenen *superprocessos* ([34], [16], [27]).

Com hem dit a la introducció, en aquest article volem presentar resultats sobre probabilitats de fer diana amb camps aleatoris que s'obtenen com a solució de sistemes d'equacions en derivades parcials estocàstiques. Com a preludi d'aquests resultats, presentem primer una extensió del Teorema 2.1 al moviment brownià multiparamètric.

Un *moviment brownià multiparamètric* d-dimensional és una extensió natural del moviment brownià. Es tracta d'un procés Gaussià

$$\left\{W_{t_1,\ldots,t_m} = \left(W^1_{t_1,\ldots,t_m}, \ldots, W^d_{t_1,\ldots,t_m}\right), (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m_+\right\},$$

amb components independents, centrats, i amb funció de covariància definida per

$$E\left(W^i_{t_1,\ldots,t_m} W^i_{s_1,\ldots,s_m}\right) = (t_1 \wedge s_1) \cdots (t_m \wedge s_m),$$

on el simbol $\wedge$ denota l'operador *ínfim*. Observi's que, per $m = 1$, aquesta definició coincideix amb la del moviment brownià. Per $m = 2$, les trajectòries són superfícies.

Aquest procés va adquirir gran popularitat especialment a partir de l'any 1975, data en la que es va publicar l'article [4] on es desenvolupa un càlcul estocàstic per processos multiparamètrics. Amb aquest treball es va iniciar un camp de recerca molt actiu durant els anys vuitanta que va confluir parcialement amb el de les equacions en derivades parcials estocàstiques.

Khosnevisan i Shi [21] estenen el Teorema 2.1 de la manera següent.

Theorem 2.2 *Per tot conjunt A compacte de $\mathbb{R}^d$ i I compacte de $\mathbb{R}^m$, existeix una constant positiva c tal que*

$$c^{-1}\, Cap_{d-2m}(A) \le P\{v(I) \cap A \ne \emptyset\} \le c\, Cap_{d-2m}(A).$$

Encara que el moviment brownià multiparamètric té una propietat de Markov en un cert sentit que aquí no explicarem (vegeu per exemple [41]), els resultats de les referències que hem esmentat més amunt no permeten obtenir el Teorema 2.2. La prova d'aquest teorema combina propietats específiques de la llei del procés amb resultats del càlcul estocàstic per processos multiparamètrics al que hem al.ludit més amunt, en particular, desigualtats maximals de martingales.

Com hem dit abans, el Teorema 2.2 pot considerar-se com un resultat sobre probabilitats de fer diana amb solucions d'equacions en derivades parcials estocàstiques. En efecte, considerem un moviment brownià biparamètric ($m = 2$) i el sistema d'equacions en derivades parcials estocàstiques definit per

$$\begin{cases} \partial^2_{t_1,t_2} u_i(t) = \sum_{j=1}^d \sigma^i_j(u(t))\partial^2_{t_1,t_2} W^j_{t_1,t_2} + b^i(u(t)), & t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2_+, \\ u_i(t) = x_i \in \mathbb{R}, & t_1 \times t_2 = 0, \end{cases} \tag{3}$$

on b^i, $\sigma^i_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $i, j = 1, \ldots, d$.

Aquest sistema l'hem d'entendre com la descipció d'un fenòmen que evoluciona en el quadrant positiu del pla real; cada component parteix d'un valor determinista i fixat, x_i en els eixos; a l'equació en derivades parcials hiperbòlica

$$\begin{cases} \partial^2_{t_1,t_2} u_i(t) = b^i(u(t)), & t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2_+, \\ u_i(t) = x_i \in \mathbb{R}, & t_1 \times t_2 = 0, \end{cases}$$

se li ha afegit un terme, $\sum_{j=1}^d \sigma^i_j(u(t))\partial^2_{t_1,t_2} W^j_{t_1,t_2}$, que representa les fluctuacions aleatòries del sistema. Com es veu, aquesta perturbació depèn de manera no lineal de l'estat del sistema en cada punt (t_1, t_2).

Per $d = 1$, mitjançant un gir de 45^o, l'equació anterior es converteix en l'equació d'ones. Observem també que si $b^i = 0$ per tot $i = 1, \ldots, d$, i $\left(\sigma^i_j\right)$ és la matriu identitat, el sistema anterior es redueix al moviment brownià biparamètric.

Amb hipòtesis adequades sobre els coeficients $b = (b_1, \ldots, b_m)$ i $\sigma = \left(\sigma^i_j\right)$, Dalang i E. Nualart [11] van establir el resultat següent.

Theorem 2.3 *Per tot $A \subset \mathbb{R}^d$, $I \subset \mathbb{R}^2$ conjunts compactes, existeix una constant positiva c tal que*

$$c^{-1} Cap_{d-4}(A) \le P\{u(I) \cap A \neq \emptyset\} \le c Cap_{d-4}(A).$$

El grau de precisió d'aquest resultat coincideix amb el donat en el Teorema 2.2 per $m = 2$. Aquest fet és realment remarcable. Si bé en la demostració del Teorema 2.2 es poden utilitzar expressions explícites de la densitat gaussiana, la solució del sistema (3) no és un procés gaussià, degut a la pertorbació no lineal definida per σ, i el nivell de complexitat és molt superior. Malgrat això, què explica la possibilitat d'aquesta extensió tan precisa?

Bàsicament, l'existència i les propietats de la densitat del vector aleatori $(u_i(t), i = 1, \ldots, d)$, en tot punt $t = (t_1, t_2)$ tal que $t_1 \times t_2 \neq 0$ (vegeu [32], [22]). Endemés, en el Teorema 2.3, les desigualtats de martingales per processos multiparamètrics també juguen un paper important en l'obtenció de la fita superior per la probabilitat de fer diana.

L'existència de densitat de vectors aleatoris és una propietat molt desitjable per motius diversos, per exemple, per l'anàlisi estadística, per la simulació, per les aproximacions numèriques. Una manera de determinar l'existència i també les propietats de la densitat és aplicant el *càlcul de Malliavin*. Amb aquest nom hom es refereix a un càlcul de variacions en un espai de dimensió infinita anomenat l'espai de Wiener abstracte. Partint de les idees creatives publicades en [28], aquest cos teòric ha estat desenvolupat pel mateix Malliavin [29] i també per diversos autors com ara Stroock, Shigekawa, Watanabe ([40], [24], [25], [26], [42]) donant lloc a una extensa producció científica. La motivació inicial de Malliavin fou donar una demostració probabilista del teorema d'hipoel.lipticitat de Hörmander per operadors diferencials expressables com a suma de quadrats. Sense ànim de ser massa explícits en aquest tema, direm que l'existència i propietats de densitat per la solució d'equacions diferencials estocàstiques és un problema que està relacionat amb l'existència i propietats de solució d'equacions en derivades parcials, via l'equació de Kolmogorov. Cap al final de l'article explicarem breument la posibilitat d'obtenir una fórmula per la densitat mitjançant el càlcul de Malliavin.

3 Criteris per l'obtenció de cotes

En aquesta secció presentem condicions suficients per l'obtenció de cotes superiors i inferiors de les probabilitats de fer diana, basades en propietats de certes densitats. Els resultats formen part del treball [13]. L'objectiu que ens va motivar va ser analitzar quins són els elements essencials que porten a l'obtenció de les cotes, quin paper juguen les dimensions del camp aleatori i la de l'espai que el parametritza i, en definitiva, de proporcionar un marc abstracte aplicable a situacions diverses.

El tractament que fem en aquest estudi està inspirat en [11], [8]. Recentment, en [3] també s'han trobat criteris amb el mateix objectiu. Ara bé, aquests només són aplicables a camps aleatoris gaussians, mentre que els nostres s'apliquen a una classe molt més àmplia de camps aleatoris.

Comencem estudiant les cotes inferiors.

Theorem 3.1 *Considerem les hipòtesis següents:*

1. *Per tots $x, y \in \mathbb{R}^m$, $x \neq y$, el vector $(v(x), v(y))$ té una densitat $p_{x,y}$, i existeixen $\gamma, \alpha \in]0, \infty[$ tals que*

$$p_{x,y}(z_1, z_2) \leq C \frac{1}{\|x-y\|^\gamma} \exp\left(-\frac{\|z_1 - z_2\|^2}{\|x-y\|^\alpha}\right), \tag{4}$$

per tots $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^d$.

2. *La densitat p_x de $v(x)$ compleix $\inf_{w \in K} p_x(w) > 0$, per tot conjunt compacte $K \subset \mathbb{R}^d$, uniformement en x sobre conjunts compactes.*

Aleshores, per tot conjunt afitat $A \subset [-N, N]^d$, existeix una constant $c > 0$ tal que

$$P\{v(I) \cap A \neq \emptyset\} \geq c Cap_{\frac{2}{\alpha}(\gamma - m)}(A).$$

La primera hipòtesi del teorema suposa l'existència de densitat de qualsevol vector aleatori de la forma $(v(x), v(y))$. Endemés, es requereix una majoració per una expressió que recorda la densitat gaussiana. La segona hipòtesi ens diu que la densitat ha de ser estrictament positiva sobre conjunts compactes, uniformement per conjunts d'indexos del proces també compactes. En casos concrets, aquestes condicions es comprovaran utilitzant el càlcul de Malliavin.

Els valors dels paràmetres γ i α dependran de l'estructura del camp aleatori i, en particular, de la seva dimensió, com veurem més endavant amb un exemple.

El fet que la cota inferior s'expressi en termes de la capacitat de Bessel-Riesz té molta relació amb la hipòtesi 1 del teorema. En efecte, el mètode de demostració del teorema 3.1 consisteix a associar una variable aleatòria positiva J al conjunt $\{v(I) \cap A \neq \emptyset\}$, de manera que

$$P\{v(I) \cap A \neq \emptyset\} \geq P\{J > 0\}.$$

La desigualtat de Paley-Zigmund ens diu que

$$P\{J > 0\} \geq \frac{[E(J)]^2}{E[(J)^2]}.$$

La hipòtesi 2 del teorema ens permet afitar inferiorment l'expressió $[E(J)]^2$ mitjantçant una constant positiva, mentre que la hipòtesi 1 permet afitar superiorment $E[(J)^2]$ per una expressió del tipus

$$\int_I dx \int_I dy \frac{\exp\left(-\frac{a^2}{\|x-y\|^\alpha}\right)}{\|x-y\|^\gamma},$$

on a és una constant. Un càlcul senzill demostra que aquesta integral està majorada per $CK_{\frac{2}{\alpha}(\gamma-m)}(a)$, on $C>0$. A partir d'aquí, s'obtè la cota prevista.

En els exemples que hem presentat en la secció anterior, les cotes superiors de les probabilitats de fer diana s'expressen en termes de la capacitat de Bessel-Riesz. Ara bé, els arguments que s'utilitzen per establir-les, no semblen exportables a situacions més generals. En comptes de la capacitat del conjunt A, farem servir la mesura de Hausdorff. L'objectiu és, en exemples concrets, assolir un valor β per la dimensió de Hausdorff que coincideixi amb el de la capacitat de Bessel-Riesz. Així, pel resultat que hem esmentat abans de Frostman, les estimacions seran coherents.

El mètode d'obtenció de cotes superiors es fa en dues etapes. En primer lloc, es localitza l'espai de paràmetres I i es considera únicament un rectangle *petit*. Simultàniament, es considera una *petita* porció del conjunt A, per exemple, una bola amb un radi relacionat amb la mida del petit rectangle que hem escollit com espai de parmetres. Per un argument simple de recobriment, resulta que si es té una informació prou precisa de les probabilitats de fer diana en aquest micro-ambient, aleshores es poden obtenir les cotes superiors desitjades.

De manera més precisa, fixem $\varepsilon>0$ i considerem rectangles de $\mathbb{R}^m$ amb l'objectiu de recobrir I, per exemple,

$$R_j^\varepsilon=\prod_{l=1}^{m}\left[j_l\varepsilon^{\frac{1}{\delta}},(j_l+1)\varepsilon^{\frac{1}{\delta}}\right],$$

on $\delta>0$, $\varepsilon\in[0,1[$, $j_1,\dots,j_m\in\mathbb{Z}$, i $j=(j_1,\dots,j_m)$.

Denotem per $B_\varepsilon(z)$ la bola de centre z i radi ε i considerem punts $z\in A$. Per un conjunt $D\subset\mathbb{R}^d$, definim $D^{(a)}=\{x\in\mathbb{R}^d : d(x,D)<a\}$. Val la Proposició següent.

Proposition 3.2 *Fixem $\theta>0$, $\varepsilon\in]0,1[$ i $D\subset\mathbb{R}^d$. Suposem que per tot rectangle (com els que hem descrit abans) que compleixi $R_j^\varepsilon\cap I\neq\emptyset$ i per a tot $z\in D^{(1)}$,*

$$P\left\{v(R_j^\varepsilon)\cap B_\varepsilon(z)\neq\emptyset\right\}\leq c\varepsilon^\theta. \tag{5}$$

Aleshores, per a tot borelià $A\subset D$

$$P\left\{v(I)\cap A\neq\emptyset\right\}\leq C\mathcal{H}_{\theta-\frac{m}{\delta}}(A).$$

La demostració d'aquest resultat consisteix a passar de (5) a una cota superior per $P\{v(I) \cap B_\varepsilon(z) \neq \emptyset\}$ utilitzant el teorema de les probabilitats totals,

$$\begin{aligned} P\{v(I) \cap B_\varepsilon(z) \neq \emptyset\} &\leq \sum_{j: R_j^\varepsilon \cap I \neq \emptyset} P\left\{v(R_j^\varepsilon) \cap B_\varepsilon(z) \neq \emptyset\right\} \\ &\leq C\varepsilon^{-\frac{m}{\delta}} P\left\{v(R_j^\varepsilon) \cap B_\varepsilon(z) \neq \emptyset\right\} \leq C\varepsilon^{\theta - \frac{m}{\delta}}. \end{aligned}$$

Tot seguit, cal passar de la bola $B_\varepsilon(z)$ al conjunt A i això també es fa per un argument de recobriment relacionat amb la definició de la mesura de Hausdorff.

La proposició anterior descriu el pas del micro al macro cosmos. Però, com es pot obtenir una fita com la de la hipòtesi (5)? El teorema següent ens proporciona una resposta.

Theorem 3.3 *Fixem $D \subset \mathbb{R}^n$. Suposem que*

1. *Per tot $x \in \mathbb{R}^m$, $v(x)$ té densitat p_x, i*

$$\sup_{z \in D^{(2)}} \sup_{x \in I^{(1)}} p_x(z) \leq C.$$

2. *Existeix $\delta \in]0,1]$ tal que per tots $q \in [1, \infty[$, $x, y \in I^{(1)}$,*

$$E\left(\|v(x) - v(y)\|^q\right) \leq C\|x - y\|^{q\delta}.$$

Aleshores, per a tot $\theta \in]0, d[$,

$$P\left\{v(R_j^\varepsilon) \cap B_\varepsilon(z) \neq \emptyset\right\} \leq c\varepsilon^\theta.$$

En conseqüència,

$$P\{v(I) \cap A \neq \emptyset\} \leq C\mathcal{H}_{\theta - \frac{m}{\delta}}(A).$$

Novament fem jugar un paper a la densitat de les variables aleatòries del procés. Cal observar que, pel criteri de continuïtat de Kolmogorov, la hipòtesi 2 implica que les trajectòries del procés $\{v(x), x \in I\}$ son Hölder contínues de grau estrictament menor que δ.

Resumint, es poden obtenir cotes inferiors de les probabilitats de fer diana en termes de la capacitat de Bessel-Riesz suposant que

- Les densitats conjuntes de $(v(x), v(y))$ admeten fites superiors de tipus gaussià.

- La densitat de cada $v(x)$ és estrictament positiva sobre conjunts compactes.

Les cotes superiors en termes de la mesura de Hausdorff es poden obtenir suposant que

- La densitat de cada $v(x)$ està afitada superiorment sobre conjunts compactes.
- $E\left(\|v(x)-v(y)\|^q\right) \leq C\|x-y\|^{q\delta}$.

Fem notar que, per una classe de processos gaussians, la fita superior del Teorema 3.3 es pot millorar lleugerament, assolint $\mathcal{H}_{d-\frac{m}{\delta}}(A)$ ([13], Theorem 2.6).

4 Aplicació a equacions en derivades parcials estocàstiques

En aquesta secció aplicarem els criteris establerts en l'anterior a un exemple de camp aleatori obtingut con solució d'un sistema d'equacions en derivades parcials estocàstiques d'ones. Analitzarem únicament el cas particular senzill en que la solució és un camp aleatori gaussià i, per tant, les comprovacions sobre les propietats de la densitat no tenen un gran nivell de dificultat.

Comencem considerant una classe d'equacions en derivades parcials estocàstiques de la qual derivarem l'exemple i que, més endavant, ens servirà de marc per citar treballs relacionats, treballs en curs i perspectives.

Sigui

$$\mathcal{L}(u_i)(t,x) = b_i(u(t,x)) + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(u(t,x))\dot{W}^j(t,x), \tag{6}$$

$1 \leq i \leq d$, $t \in]0,T]$, $x \in \mathbb{R}^k$, $k \geq 1$. La notació $\mathcal{L}$ denota un operador diferencial de primer o segon ordre en t i segon ordre en x. Per exemple,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \partial_t - \Delta, \text{ operador de la calor,}\\
\mathcal{L} &= \partial^2_{t,t} - \Delta, \text{ operador d'ones,}
\end{aligned}$$

on Δ és l'operador de Laplace. Per simplificar, suposem condicions inicials en $t=0$ nul.les.

L'equació (3) presenta diferències i similituds amb (6). En la primera, els dos components del paràmetre, t_1 i t_2, juguen el mateix paper, i l'operador diferencial és $\mathcal{L} = \partial^2_{t_1,t_2}$. L'equació (6), en canvi, serveix de model de l'evolució en temps d'un fenòmen que es desenvolupa en un espai k-dimensional. Els components del paràmetre representen això, temps (t) i espai (x). Ambdues equacions incorporen amb un patró similar les fluctuacions aleatòries de un sistema evolutiu. En (6), l'ingredient aleatori $W^j(t,x)$ que considerem, no és un moviment brownià multiparamètric, sino un procés que, en temps es comporta con el moviment brownià, però en espai té una covariancia efectiva. Tot seguit donem una definició precisa de cada component. Per simplificar, no fem esment a l'índex j.

Sigui $W = \Big(W(\psi),\ \psi \in \mathcal{D}(]0,\infty[\times\mathbb{R}^d)\Big)$ un procés indexat per funcions infinitament diferenciables amb suport compacte ($\mathcal{D}(]0,\infty[\times\mathbb{R}^d)$. Suposem que és un procés gaussià, $E(W(\psi)) = 0$ i té una funció de covariancia definida per

$$E\Big(W(\psi_1)W(\psi_2)\Big) = \int_{\mathbb{R}_+} ds \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(dx)(\psi_1(s) * \tilde{\psi}_2(s))(x),$$

on Γ designa una mesura positiva, definida no negativa i temperada (en el sentit de les distribucions). La notació "$*$" es refereix a l'operador de convolució i $\psi_2(s,x) = \psi_2(s,-x)$.

L'expressió de la covariància mostra que el procés W és blanc (incorrelacionat) en temps i correlacionat en espai, amb mesura de covariancia Γ.

L'escriptura $\dot{W}^j(t,x)$ és formal, però la utilitzem per denotar el diferencial (en algun sentit) del procés W^j.

Una manera rigurosa d'entendre (6) és a través d'una formulació integral. Existeixen a la literatura de les equacions en derivades parcials estocàstiques diverses maneres de fer això, diverses tradicions (vegeu per exemple [14], [38], [41]). Aquí farem servir la formulació *mild* que utilitza la representació de l'invers de l'operador $\mathcal{L}$. Expliquem què vol dir això sobre l'exemple $\mathcal{L} = \partial^2_{t,t} - \Delta$, és a dir, quan considerem l'equació d'ones estocàstiques.

Sigui $G(t)$, $t > 0$, la solució fonamental de l'equació d'ones determinista $(\partial^2_{t,t} - \Delta)u = 0$. És conegut que la transformada de Fourier de la distribució $G(t)$ és

$$\mathcal{F}G(t,\cdot)(\xi) = \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}.$$

Una solució *mild* de (6) per l'operador d'ones (d'ara en endavant, direm simplement *una solució*) vol dir un camp aleatori $\{u(t,x), (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^k\}$ que satisfà la identitat

$$\begin{aligned} u_i(t,x) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^k} G(t-s,x-y) b_i(u(s,y)) ds dy \\ &\quad + \sum_{j=1}^d \int_0^t \int_{\mathbb{R}^k} G(t-s,x-y)\sigma_{ij}(u(s,y)) W^j(ds,dy), \end{aligned} \tag{7}$$

$1 \leq i \leq d$. Obviament, per entendre exactament l'expressió (7), cal donar un sentit precís a la integral estocàstica (el darrer terme de l'expressió). Sense detallar aquesta qüestió, fem notar que els resultats sobre existència de solució de l'equació (7) depenen de les propietats dels coeficients b i σ, i de la mesura de covariància Γ (vegeu [7], [30], [6], [35], [36], [33], [39], [5], [12] per una mostra de resultats).

Ara ens concentrem en el cas particular en que b és nul i σ la matriu identitat i, per tant

$$u_i(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^k} G(t-r, x-y) W^i(dr, dy). \tag{8}$$

Encara que G no és una funció regular dels seus arguments, podem interpretar la integral del segon terme d'aquesta igualtat com $W^i(G(t-\cdot, x-*))$, és a dir, el component i-èssim del camp aleatori W indexat per G, que és una variable aleatòria gaussiana, centrada i amb variància

$$\begin{aligned}
\sigma_{t,x}^2 &:= E\left(u_i(t,x)\right)^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} ds \int_{\mathbb{R}^d} \mu(d\xi) \mathcal{F}G(t-s, x-*)(\xi) \overline{\mathcal{F}G(t-s, x-*)(\xi)} \\
&= \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^k} \frac{\sin^2(s|\xi|)}{|\xi|^2} \mu(d\xi).
\end{aligned}$$

En conseqüència, com que les variables aleatòries $(u_i(t,x), i = 1, \ldots, d)$ són independents, cada vector aleatori $u(t,x)$, $(t,x) \in]0,T] \times \mathbb{R}^k$ té densitat

$$p_{t,x}(z) = \frac{1}{(2\pi\sigma_{t,x}^2)^{\frac{d}{2}}} \exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2\sigma_{t,x}^2}\right).$$

Càlculs explícits donen les estimacions

$$C(t \wedge t^3) \leq \sigma_{t,x}^2 = \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^k} \frac{\sin^2(s|\xi|)}{|\xi|^2} \mu(d\xi) \leq \tilde{C}(t + t^3).$$

Aleshores, tenint en compte l'expressió de $p_{t,x}(z)$, és facil obtenir

$$\begin{aligned}
\sup_{z \in [-N,N]^d} \sup_{(t,x) \in [t_0,T] \times \mathbb{R}^k} p_{t,x}(z) &\geq C_1, \\
\sup_{z \in [-N,N]^d} \sup_{(t,x) \in [t_0,T] \times \mathbb{R}^k} p_{t,x}(z) &\leq C_2.
\end{aligned}$$

Aquestes propietats ens diuen que el procés estocàstic $(u(t,x), (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^k)$ definit per (8) satisfà la hipòtesi 2 del Teorema 3.1 i la hipòtesi 1 del Teorema 3.3, respectivament.

Un ingredient fonamental per completar la verificació de les hipòtesis dels teoremes que acabem de citar és el següent. Considerem el cas particular de mesura de covariancia $\Gamma(dx) = |x|^{-\beta}dx$, $\beta \in]0,2[$, és a dir, amb una densitat donada per un nucli de Riesz. Aleshores, per tot $(t,x),(s,y) \in [t_0,T] \times \mathbb{R}^k$,

$$\begin{aligned} C_1 \left(|t-s| + \|x-y\|\right)^{2-\beta} &\leq E\left(\|u_{t,x} - u_{s,y}\|^2\right) \\ &\leq C_2 \left(|t-s| + \|x-y\|\right)^{2-\beta}. \end{aligned} \tag{9}$$

Aquest cas particular de mesura de covariància es troba en molts dels treballs sobre equacions d'ones estocàstiques, en particular, en els que hem citat anteriorment. És una funció decreixent de x, la qual cosa indica que la covariància espacial entre $u(t,x)$, $u(t,y)$ decreix en funció de la distància entre x i y.

La demostració de (9) es fa a partir de manipulacions sobre la forma explícita de $E\left(\|u_{t,x} - u_{s,y}\|^2\right)$, que es poden obtenir de manera similar a la de $E(u_i(t,x))^2$. La propietat coneguda amb el nom de *hipercontractivitat* dels processos gaussians, implica

$$E\left(\|u_{t,x} - u_{s,y}\|^p\right) \leq C\left(|t-s| + \|x-y\|\right)^{(2-\beta)\frac{p}{2}}.$$

En conseqüència, l'estimació superior de (9) implica la validesa de la hipòtesi 2 del Teorema 3.3. Observem de passada que, pel criteri de continuïtat de Kolmogorov, obtenim la Hölder continuïtat de les trajectòries del camp aleatori u amb un grau $\gamma \in]0, \frac{2-\beta}{2}[$. I, en virtud de l'estimació inferior en (9), aquest grau és òptim.

Les dues estimacions de (9), juntament amb la forma explícita de la densitat conjunta de dos vectors aleatoris gaussians, proporcionen, de manera no trivial, la validesa de la hipòtesi 1 del Teorema 3.1. Concretament, i sense entrar en detalls tècnics, si denotem per $p_{t,x;s,y}(\cdot,\cdot)$ la densitat conjunta del vector aleatori $2d$-dimensional $(u(t,x), u(s,y))$, s'obtè

$$p_{t,x;s,y}(z_1,z_2) \leq \frac{C}{\left(|t-s| + |x-y|\right)^{\frac{d(2-\beta)}{2}}} \exp\left(-\frac{c\|z_1 - z_2\|^2}{\left(|t-s| + |x-y|\right)^{2-\beta}}\right), \tag{10}$$

per a tot $z_1, z_2 \in [-N,N]^d$, on C i c són constants positives que no depenen de (t,x), (s,y).

Con a resultat de la discussió anterior, podem establir el teorema següent.

Theorem 4.1 *Sigui* $\{u(t,x), (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^k\}$ *el camp aleatori definit per* (8). *Considerem subconjunts compactes* $I \subset [t_0,T]$, $J \subset \mathbb{R}^k$, $t_0 > 0$, *amb* *mesura de Lebesgue positiva. Fixem $N > 0$. Aleshores, existeixen constants positives $c_i = c_i(I, J, N, \beta, k, d)$, $i = 1, 2$, tals que per a tot $A \subset [-N, N]^d$,*

$$c_1 \, Cap_{d-\frac{2(k+1)}{2-\beta}}(A) \le P\{u(I \times J) \cap A \neq \emptyset\} \le c_2 \mathcal{H}_{d-\frac{2(k+1)}{2-\beta}}(A). \qquad (11)$$

En efecte, només cal aplicar els Teoremes 3.1, 3.3 prenent $m = k + 1$, i observar que, pel que hem descrit més amunt, els valors dels paràmetres γ, α i δ són, respectivament, $\gamma = \frac{d(2-\beta)}{2}$, $\alpha = 2 - \beta$, $\delta = \frac{2-\beta}{2}$.

De manera similar, es poden considerar les seccions en temps i en espai del procés u. Concretament, per a tot $t > 0$, la secció de u per t és el camp aleatori definit per $u(t) = \{u(t, x), x \in \mathbb{R}^k\}$; analogament, per a tot $x \in \mathbb{R}^k$, la secció de u per x és el camp aleatori $u(x) = \{u(t, x), t \in [0, T]\}$. Com que els Teoremes 3.1, 3.3 es refereixen a camps aleatoris generals, a partir dels comentaris anteriors es poden també obtenir els resultats següents:

Theorem 4.2 *Considerem el mateix marc que en el Teorema 4.1 i les mateixes notacions. Es té que*

1. *Per a tot $t \in I$, existeixen constants positives $c_i = c_i(J, N, \beta, k, d)$, $i = 1, 2$, tals que, per tot borelià $A \subset [-N, N]^d$,*

$$c_1 \, Cap_{d-\frac{2k}{2-\beta}} A) \le P\{u(\{t\} \times J) \cap A \neq \emptyset\} \le c_2 \mathcal{H}_{d-\frac{2k}{2-\beta}}(A).$$

2. *Per a tot $x \in J$, existeixen constants positives $c_i = c(I, N, \beta, k, d)$, $i = 1, 2$, tals que, per tot borelià $A \subset [-N, N]^d$,*

$$c_1 \, Cap_{d-\frac{2}{2-\beta}}(A) \le P\{u(I \times \{x\}) \cap A \neq \emptyset\} \le c_2 \mathcal{H}_{d-\frac{2}{2-\beta}}(A).$$

A la vista del Teorema 4.1 podem analitzar quan un singletó $A = \{a\}$ és un conjunt *polar* pel procés u. D'una banda, si A és *polar*, és a dir, si

$$P\{u(I \times J) \cap A \neq \emptyset\} = 0,$$

necesàriament $\mathrm{Cap}_{d-\frac{2(k+1)}{2-\beta}}(A) = 0$, per la cota inferior de (11). Això és possible únicament si $d - \frac{2(k+1)}{2-\beta} \ge 0$.

D'altra banda, si $d - \frac{2(k+1)}{2-\beta} > 0$, aleshores $\mathcal{H}_{d-\frac{2(k+1)}{2-\beta}}(A) = 0$ i, per tant, tenint en compte la cota superior de (11), A és *polar*.

De fet conjecturem que A és *polar* si i únicament si $d - \frac{2(k+1)}{2-\beta} \ge 0$. Però l'anàlisi del cas $d - \frac{2(k+1)}{2-\beta} = 0$ no està completament estudiat.

Una altre exemple en un context gaussià és un sistema d'equacions estocàstiques de la calor. Concretament,

$$(\partial_t - \Delta)(u_i)(t,x) = \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} \dot{W}^j(t,x),$$

$1 \le i \le d$, $t \in]0,T]$, $x \in \mathbb{R}^k$. Per simplificar, suposem com abans que la matriu $\sigma = (\sigma_{ij})$ és la identitat. El camp aleatori definit per aquesta equació té per components (independents)

$$u_i(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^k} G(t-s, x-y) W^i(ds,dy),$$

on $G(t,x) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{k}{2}}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right)$. Es poden aplicar els teoremes 3.1 i 3.3 i obtenir els resultats establerts en [8] i [3].

5 El cas no gaussià: el paper del càlcul de Malliavin

Tornem ara al cas general d'equacions descrites en (6). El interès dels criteris explicats en la secció 3 és la seva potencial aplicació a aquesta situació més complexa, sempre que es puguin establir l'existència i les propietats de les densitat que es requereixen. En principi, això és factible utilitzant el càlcul de Malliavin.

Sense ànim de ser molt explícits, podem dir que el càlcul de Malliavin és un calcul de variacions en l'espai on viuen les trajectòries d'un procés gaussià de referència. Per exemple, si la referència és el moviment brownià d-dimensional, aleshores l'espai és $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^d)$ i, per tant, de dimensió infinita. Per desenvolupar aquest càlcul, es necessita definir un operador de derivació que, de fet, és una derivada direccional en direccions preses en un espai estretament relacionat amb l'estructura de covariancia del procés gaussià de referència. Així, per exemple, si prenem con a base el procés W definit en la secció 3, l'espai de direccions admisibles per la derivació està relacionat amb la mesura de covariancia Γ. A partir de l'operador de derivació, es defineixen nocions de *regularitat*, similars a la relació de pertanyença a un espai de Sobolev, i de *no-degeneració*, semblant a la inversibilitat d'operadors.

L'ingredient del càlcul de Malliavin que aquí ens interessa destacar és la *fòrmula d'integració per parts* que expliquem tot seguit.

Considerem $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $G : \Omega \to \mathbb{R}$ vectors aleatoris *regulars* en el sentit que hem indicat abans, $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ una funció de $\mathcal{C}^\infty$, i un multiíndex

$\alpha \in \{1, \ldots, m\}^k$. La *fòrmula d'integració per parts* estableix l'existència d'una variable aleatòria $H_{(\alpha)}(F, G)$, amb una expressió explícita que aquí no detallem, tal que

$$E\left[\partial_\alpha \varphi(F) G\right] = E\left[\varphi(F) H_{(\alpha)}(F, G)\right] \tag{12}$$

(vegi's per exemple [42]). Les hipòtesis sobre F, que no hem detallat, impliquen l'existència de densitat per la seva llei. Aquesta densitat pot expressar-se rigurosament com $p_F(y) = E\left[\delta_{\{y\}}(F)\right]$, on $\delta_{\{y\}}(F)$ denota la delta de Dirac en y tal i com s'estableix en [42]). Una conseqüència molt important de (12), és la fòrmula per la densitat

$$p_F(y) = E\left[\delta_{\{y\}}(F)\right] = E\left[1_{\{F>y\}} H_{(1,2,\ldots,m)}(F, 1)\right]. \tag{13}$$

Per utilitzar els criteris de la secció 2, haurem d'aplicar la fòrmula anterior a dos casos diferents. En primer lloc a $F := (u_1(t, x), \ldots, u_d(t, x))$, on $\{(u_1(t, x), \ldots, u_d(t, x)), (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^k\}$ és la solució de (6) (en els exemples en que tal solució existeixi), per deduir l'existència de densitat en cada punt $(t, x) \in]0, T] \times \mathbb{R}^k$, $p_{t,x}$, i les propietats d'afitació uniforme sobre compactes i la positivitat. En segon lloc, i aquest és el cas més complex, a

$$F = (u_1(s, y), \ldots, u_d(s, y), u_1(t, x), \ldots, u_d(t, x)),$$

$(s, y) \neq (t, x)$. Si la densitat conjunta de F existeix, aplicant la fòrmula (13) s'obté

$$p_{t,x;s,y}(z_1, z_2) = E\left[1_{\{F>(z_1,z_2)\}} H_{(1,2,\ldots,m)}(F, 1)\right].$$

La determinació d'una cota superior de tipus gaussià, con la que es requereix per comprovar la hipòtesi 1 del Teorema 3.1 pot obtenir-se a partir dels arguments següents. Aplicant la desigualtat de Hölder,

$$|p_{t,x;s,y}(z_1, z_2)| \leq \left[P\left(F > (z_1, z_2)\right)\right]^{\frac{1}{q}} \left\|H_{(1,2,\ldots,m)}(F, 1)\right\|_{L^p(\Omega)},$$

amb $p \in]1, \infty[$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. La majoració del primer factor proporcionarà el factor exponencial de (4), mentre que la majoració del segon donarà lloc al factor fraccional de (4).

Aquesta metodologia ha estat utilitzada en [9] per l'equació de la calor estocàstica no lineal en dimensió espacial $k = 1$. En un treball en vies de realització amb R. Dalang, estem estudiant l'equació d'ones estocàstiques no lineal en dimensió espacial $k \in \{2, 3\}$.

Els criteris de la secció 3 proporcionen una manera d'enfocar el problema de fer estimacions de les probabilitats de fer diana amb camps aleatoris. Els problemes que es presenten en l'aplicació d'aquest criteris a solucions de sistemes d'equacions en derivades parcials estocàstiques depenen de l'operador diferencial que descriu l'equació, de la dimensió de l'espai i del tipus de soroll que es tria per la modelització de les fluctuacions aleatòries.

Agraïments. L'autora vol agrair a la Societat Catalana de Matemàtiques per la proposta de conferenciant a l'acte d'inauguració del curs 2009-2010 que va tenir lloc el dia 11 de novembre del 2009. Aquest treball és una extensió dels temes que es van presentar a la conferència.

References

[1] Bertoin, J. (1996). Lévy Processes. Cambridge University Press.

[2] Blumenthal, R. M., Getoor, R. K. (1968). Markov Processes and Potential Theory. Academic Press.

[3] Biermé, H., Lacaux, C., Xiao, Y. (2009). Hitting probabilities and the Hausdorff dimension of the inverse images of anisotropic Gaussian random fields. *Bull. Lond. Math. Soc.* **41**, 253-273.

[4] Cairoli, R., Walsh, J. B. (1975). Stochastic integrals in the plane. *Acta Mathematica* **134**, 11-183.

[5] Conus, D., Dalang, R. C. (2008). The non-linear stochastic wave equation in high dimensions. *Electronic J. Probab.* **13**, 22, 629-670.

[6] Dalang, R. C. (1999). Extending the martingale measure stochastic integral with applications to spatially homegeneous s.p.d.e.'s. *Electron. J. Probab.* **4**, 6, 1-29.

[7] Dalang, R. C., Frangos, N. E. (1998). The stochastic wave equation in two spatial dimensions. *The Annals of Probability* **26**, 187-212.

[8] Dalang, R. C., Khoshnevisan, D., Nualart, E. (2007). Hitting probabilities for systems of non-linear stochastic heat equations with additive noise. *Latin Amer. J. Probab. Statist. (ALEA)* **3**, 231-271.

[9] Dalang, R. C., Khoshnevisan, D., Nualart, E. (2009). Hitting probabilities for systems of non-linear stochastic heat equations with multiplicative noise. *Probab. Th. Rel. Fields* **144**, 371-427.

[10] Dalang, R. C., Mueller, C., Zambotti, L. (2006). Hitting probabilities of s.p.d.e.'s with reflection. *Ann. Probab.* **34**, 1423-1450.

[11] Dalang, R. C., Nualart, E. (2004). Potential theory for hyperbolic SPDEs. *The Annals of Probability* **32**, 2099-2148.

[12] Dalang, R. C., Sanz-Solé, M. (2009). Hölder-Sobolev regularity of the solution to the stochastic wave equation in dimension three. *Memoirs Amer. Math. Soc.* **199**, no. 931, 1-70.

[13] Dalang, R. C., Sanz-Solé, M. Criteria for hitting probabilities with applications to systems of stochastic wave equations. *Bernoulli*, to appear.

[14] Da Prato, G., Zabczyck, J. (1992). Stochastic equations in infinite dimensions. Cambridge University Press, Cambridge.

[15] Dvoretszky, A., Erdös, P., Kakutani, S. (1950). Double points of paths of Brownian motion. *Acta Sci. Math. Szeged* **12**, 75-81.

[16] Dynkin, E. B. (1991). A probabilistic approach to one class of nonlinear differential equations. *Probab. Th. Rel. Fields* **89**, 89-115.

[17] Fitzimmons, P. J., Salisbury, T. S. (1989). Capacity and energy for multiparameter Markov Processes. *Ann. Inst. Henri Poincaré Prob. Statist.* **25**, 325-350.

[18] Hirsch, F., Song, S. (1995). Markov properties of multiparameter processes and capacities. *Probab. Th. Rel. Fields* **103**, 45-71.

[19] Kahane, J.-P. (1985). Some series of functions (2nd Ed.). Cambridge University Press. Cambridge.

[20] Khoshnevisan, D. (2002). Multiparameter Processes: An Introduction to Random Fields. Springer Verlag.

[21] Khoshnevisan, D. Shi, Z. (1999). Brownian sheet and capacity. *The Annals of Probability* **27**, 1135-1159.

[22] Kohatsu-Higa, A. (2003). Lower bound estimates for densities of uniformly elliptic random variables on Wiener space.*Probab. Th. Rel. Fields* **126**, 3, 421-457.

[23] Kakutani S. (1944). Two-dimensional Brownian motion and harmonic functions. *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **20**, 648-652.

[24] Kusuoka, S., Stroock, D. (1984). Applications of the Malliavin calculus I. *In: Proc. Symp. on Stoch. Anal. (K. Itô ed.) Katata/Kyoto 1982*, 271-306. North Holland.

[25] Kusuoka, S., Stroock, D. (1985). Applications of the Malliavin calculus II. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect IA* **32**, 1-76.

[26] Kusuoka, S., Stroock, D. (1987). Applications of the Malliavin calculus III. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect IA* **34**, 391-442.

[27] Le Gall, J. F. (1999). Spatial branching processes, random snakes and partial differential equations. *Lectures in Math. ETH Zürich, Birkhäuser* **1527**, 112-235.

[28] Malliavin, P. (1978). Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators. *Proc. Int. Symp. on SDE, Kyoto 1976.* John Wiley. 195-263.

[29] Malliavin, P. (1997). Stochastic Analysis. *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* **313**. Springer Verlag.

[30] Millet, A., Sanz-Solé, M. (1999). A stochastic wave equation in two space dimension: smoothness of the law. *The Annals of Probability* **37**, 2, 803-844.

[31] Mueller, C. and Tribe, R. (2002). Hitting properties of the random string. *Electron. J. Probab.* **7**, 1-29 (2002).

[32] Nualart, D., Sanz-Solé (1985). Malliavin calculus for two-parameter Wiener functionals. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* **70**, 573-590.

[33] Ondreját, M. (2004). Existence of global mild and strong solutions to stochastic hyperbolic evolution equations driven by a spatially homogeneous Wiener process. *J. Evol. Equ.* **4**, 169-191.

[34] Perkins, E. (1990). Polar sets ad multiple points for super-Brownian motion. *The Annals of Probability* **18**, 453-491.

[35] Peszat, S. and Zabczyk, J. (2000). Nonlinear stochastic wave and heat equations. *Probab. Theory Related Fields* **116** (3), 421-443.

[36] Peszat, S. (2002). The Cauchy problem for a nonlinear stochastic wave equation in any dimension. *J. Evol. Equ.* **2**, 3, 383-394,

[37] Revuz, D. and Yor, M. (1999). Continuous Martingales and Brownian Motion, Third Edition, Springer Verlag.

[38] Rozovskii, B. L. (1983) Stochastic Evolution Systems. Kluwer Academic Publishers

[39] Sanz-Solé, M. (2005). Malliavin Calculus, with Applications to Stochastic Partial Differential Equations. EPFL Press. Fundamental Sciences. Mathematics. Distributed by CRC Press, Taylor and Francis Group.

[40] Stroock D. (1983). Some applications of stochastic calculus to partial differential equations. *In: Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour*, Lectures Notes in Math. **976**, 267-382.

[41] Walsh, J. B. (1986). An introduction to stochastic partial differential eauqtions. *École d'Été de probabilités de Saint-Flour XIV. Lecture Note in Math.* **1180**, 266-437. Springer Verlag.

[42] Watanabe, S. (1984). Lectures on stochastic differential equations and Malliavin calculus. *Tata Inst. Fund. Res.* Springer Verlag.

[43] Xiao, Y. (2008). Sample paths properties of anisotropic Gaussian random fields, *In: A Minicourse on Stochastic Partial Differential Equations, D. Khoshnevisan, F. Rassoul-Agha Eds. Lecture Notes in Mathematics* **1962**, Springer.

[44] Zambotti, L. (2002). Integration by parts on convex sets of paths and applications to s.p.d.e.'s with reflection. *Probab. Theory and Rel. Fields*, **123** (4), 579-600.

[45] Zambotti, L. (2003). Integration by parts on δ-Bessel bridges, $\delta > 3$, and related s.p.d.e.'s. *The Annals of Probability* **31** (1), 323-348.