De nombres i jocs

Andratx Bellmunt

Universitat de Barcelona

18 de juny de 2013

SIMBa
Seminari Informal
de Matemàtiques de Barcelona

Guió

1. Què és (i què no és) un joc combinatori?

Guió

1. Què és (i què no és) un joc combinatori?

2. Nombres surreals

Guió

1. Què és (i què no és) un joc combinatori?
2. Nombres surreals
3. Jocs que no són nombres

Guió

1. Què és (i què no és) un joc combinatori?
2. Nombres surreals
3. Jocs que no són nombres
4. Com jugar (i guanyar!) al Nim

Definició

Anomenem **joc combinatori** a un joc que compleixi les següents condicions:

1. Hi ha **dos jugadors**.

Definició

Anomenem **joc combinatori** a un joc que compleixi les següents condicions:

1. Hi ha **dos jugadors**.
2. Es juga per **torns alternatius**.

Definició

Anomenem **joc combinatori** a un joc que compleixi les següents condicions:

1. Hi ha **dos jugadors**.
2. Es juga per **torns alternatius**.
3. El joc acaba després d'un nombre **finit** de torns.

Definició

Anomenem **joc combinatori** a un joc que compleixi les següents condicions:

1. Hi ha **dos jugadors**.
2. Es juga per **torns alternatius**.
3. El joc acaba després d'un nombre **finit** de torns.
4. **No** hi ha **empats**: sempre hi ha un guanyador i un perdedor.

Definició

Anomenem **joc combinatori** a un joc que compleixi les següents condicions:

1. Hi ha **dos jugadors**.
2. Es juga per **torns alternatius**.
3. El joc acaba després d'un nombre **finit** de torns.
4. **No** hi ha **empats**: sempre hi ha un guanyador i un perdedor.
5. **No** hi ha **aleatorietat**: cap jugada es determina utilitzant elements aleatoris.

Definició

Anomenem **joc combinatori** a un joc que compleixi les següents condicions:

1. Hi ha **dos jugadors**.
2. Es juga per **torns alternatius**.
3. El joc acaba després d'un nombre **finit** de torns.
4. **No** hi ha **empats**: sempre hi ha un guanyador i un perdedor.
5. **No** hi ha **aleatorietat**: cap jugada es determina utilitzant elements aleatoris.
6. Hi ha **informació completa**.

Contraexemples

El següents jocs no són jocs combinatoris

- Dòmino: hi ha més de dos jugadors.

Contraexemples

El següents jocs no són jocs combinatoris

- Dòmino: hi ha més de dos jugadors.
- Pedra-paper-tisora: els torns no són alternatius.

Contraexemples

El següents jocs <u>no</u> són jocs combinatoris

- Dòmino: hi ha més de dos jugadors.
- Pedra-paper-tisora: els torns no són alternatius.
- Tres en ratlla: el joc pot ésser infinit.

Contraexemples

El següents jocs <u>no</u> són jocs combinatoris

- Dòmino: hi ha més de dos jugadors.
- Pedra-paper-tisora: els torns no són alternatius.
- Tres en ratlla: el joc pot ésser infinit.
- Escacs: possibilitat d'empat.

Contraexemples

El següents jocs no són jocs combinatoris

- Dòmino: hi ha més de dos jugadors.
- Pedra-paper-tisora: els torns no són alternatius.
- Tres en ratlla: el joc pot ésser infinit.
- Escacs: possibilitat d'empat.
- Qualsevol joc en què calgui una tirada de daus per determinar una jugada: hi ha aleatorietat.

Contraexemples

El següents jocs <u>no</u> són jocs combinatoris

- Dòmino: hi ha més de dos jugadors.
- Pedra-paper-tisora: els torns no són alternatius.
- Tres en ratlla: el joc pot ésser infinit.
- Escacs: possibilitat d'empat.
- Qualsevol joc en què calgui una tirada de daus per determinar una jugada: hi ha aleatorietat.

Contraexemples

El següents jocs <u>no</u> són jocs combinatoris

- Dòmino: hi ha més de dos jugadors.
- Pedra-paper-tisora: els torns no són alternatius.
- Tres en ratlla: el joc pot ésser infinit.
- Escacs: possibilitat d'empat.
- Qualsevol joc en què calgui una tirada de daus per determinar una jugada: hi ha aleatorietat.

Sabríeu donar un exemple de joc que satisfaci totes les condicions excepte la de la informació completa?

Contraexemples

El següents jocs no són jocs combinatoris

- Dòmino: hi ha més de dos jugadors.
- Pedra-paper-tisora: els torns no són alternatius.
- Tres en ratlla: el joc pot ésser infinit.
- Escacs: possibilitat d'empat.
- Qualsevol joc en què calgui una tirada de daus per determinar una jugada: hi ha aleatorietat.

Sabríeu donar un exemple de joc que satisfaci totes les condicions excepte la de la informació completa?

Batalla naval

Exemples

Alguns exemples de jocs combinatoris són:

- Hackenbush (en parlarem de seguida)

Exemples

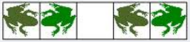
Alguns exemples de jocs combinatoris són:

- Hackenbush (en parlarem de seguida)
- Nim (en parlarem al final de la xerrada)

Exemples

Alguns exemples de jocs combinatoris són:

- Hackenbush (en parlarem de seguida)
- Nim (en parlarem al final de la xerrada)
- Granotes i gripaus: al llarg d'una fila amb diverses caselles hi situem granotes controlades per un jugador i gripaus controlats per l'altre. Les unes salten cap a la dreta i els altres cap a l'esquerra. El moviment és cap a una casella buida contigua o cap una casella buida situada a distància 2 sempre i quan puguem saltar per sobre d'algun altre batraci (propi o aliè).

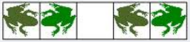


Granotes i gripaus

Exemples

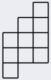
Alguns exemples de jocs combinatoris són:

- Hackenbush (en parlarem de seguida)
- Nim (en parlarem al final de la xerrada)
- Granotes i gripaus: al llarg d'una fila amb diverses caselles hi situem granotes controlades per un jugador i gripaus controlats per l'altre. Les unes salten cap a la dreta i els altres cap a l'esquerra. El moviment és cap a una casella buida contigua o cap una casella buida situada a distància 2 sempre i quan puguem saltar per sobre d'algun altre batraci (propi o aliè).



Granotes i gripaus

- Tallar pastissos: tenim una quadrícula que hem d'anar partint, un jugador fent talls horitzontals i l'altre fent talls verticals al llarg de les línies marcades.

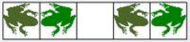


Un pastís

Exemples

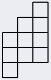
Alguns exemples de jocs combinatoris són:

- Hackenbush (en parlarem de seguida)
- Nim (en parlarem al final de la xerrada)
- Granotes i gripaus: al llarg d'una fila amb diverses caselles hi situem granotes controlades per un jugador i gripaus controlats per l'altre. Les unes salten cap a la dreta i els altres cap a l'esquerra. El moviment és cap a una casella buida contigua o cap una casella buida situada a distància 2 sempre i quan puguem saltar per sobre d'algun altre batraci (propi o alliè).



Granotes i gripaus

- Tallar pastissos: tenim una quadrícula que hem d'anar partint, un jugador fent talls horitzontals i l'altre fent talls verticals al llarg de les línies marcades.

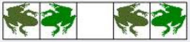


Un pastís

Exemples

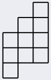
Alguns exemples de jocs combinatoris són:

- Hackenbush (en parlarem de seguida)
- Nim (en parlarem al final de la xerrada)
- Granotes i gripaus: al llarg d'una fila amb diverses caselles hi situem granotes controlades per un jugador i gripaus controlats per l'altre. Les unes salten cap a la dreta i els altres cap a l'esquerra. El moviment és cap a una casella buida contigua o cap una casella buida situada a distància 2 sempre i quan puguem saltar per sobre d'algun altre batraci (propi o aliè).



Granotes i gripaus

- Tallar pastissos: tenim una quadrícula que hem d'anar partint, un jugador fent talls horitzontals i l'altre fent talls verticals al llarg de les línies marcades.



Un pastís

Ja sabem com jugar a alguns jocs combinatoris. Ara bé, com es determina el guanyador? La resposta la coneixerem tot seguit...

Com representem els jocs?

- Als dos jugadors els anomenem **esquerre** i **dret**. Sovint els denotem per L i R, respectivament.

Com representem els jocs?

- Als dos jugadors els anomenem **esquerre** i **dret**. Sovint els denotem per L i R, respectivament.
- Un joc G es defineix de manera recursiva com un parell

$$\{G^L | G^R\},$$

on G^L és el conjunt de tots els jocs que pot aconseguir L fent una única jugada a G (G^R es defineix anàlogament).

Com representem els jocs?

- Als dos jugadors els anomenem **esquerre** i **dret**. Sovint els denotem per L i R, respectivament.
- Un joc G es defineix de manera recursiva com un parell

$$\{G^L|G^R\},$$

on G^L és el conjunt de tots els jocs que pot aconseguir L fent una única jugada a G (G^R es defineix anàlogament).
- La condició d'aturada de la recurrència es dóna quan un jugador no pot fer més moviments, situació en la qual considerem que ha perdut el joc.

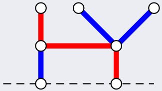
Com representem els jocs?

- Als dos jugadors els anomenem **esquerre** i **dret**. Sovint els denotem per L i R, respectivament.
- Un joc G es defineix de manera recursiva com un parell

$$\{G^L | G^R\},$$

on G^L és el conjunt de tots els jocs que pot aconseguir L fent una única jugada a G (G^R es defineix anàlogament).
- La condició d'aturada de la recurrència es dóna quan un jugador no pot fer més moviments, situació en la qual considerem que ha perdut el joc.
- El joc en què cap dels dos jugadors pot fer cap moviment, $\{\ |\ \}$, l'anomenem 0. Aquest és el joc en què **el jugador que comença perd**.

Un primer exemple: el hackenbush



En el hackenbush L talla segments bLaus i R talla segments veRmells. Quan es talla un segment, tots els segments que queden desconnectats del terra (la línia discontínua) també desapareixen. Com sempre, el primer jugador que es queda sense moviments perd.

Casos molts senzills de hackenbush

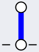
Analitzem tot seguit alguns casos molt senzills de hackenbush:

- $$= \{\ |\ \} = 0.$$

Casos molts senzills de hackenbush

Analitzem tot seguit alguns casos molt senzills de hackenbush:

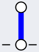
- $= \{\ |\ \} = 0.$

-  $= \{0|\ \} =: 1.$

Casos molts senzills de hackenbush

Analitzem tot seguit alguns casos molt senzills de hackenbush:

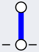
- $$\text{- - -} = \{\ |\ \} = 0.$$

- 
$$= \{0|\ \} =: 1.$$

- 
$$= \{\ |0\} =: -1.$$

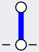
Casos molts senzills de hackenbush

Analitzem tot seguit alguns casos molt senzills de hackenbush:

- $$= \{\ |\ \} = 0.$$
-  $$= \{0|\ \} =: 1.$$
-  $$= \{\ |0\} =: -1.$$

Casos molts senzills de hackenbush

Analitzem tot seguit alguns casos molt senzills de hackenbush:

- $$= \{\ |\ \} = 0.$$
-  $$= \{0|\ \} =: 1.$$
-  $$= \{\ |0\} =: -1.$$

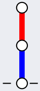
En el segon joc sempre guanya L i per això ho denotem per un número positiu. De manera semblant en el tercer joc hi escrivim un número negatiu per indicar que sempre guanya R. Que hàgim triat $1, -1$ indica que el jugador corresponent té "un torn d'avantatge" sobre l'altre. Caldrà formalitzar aquestes qüestions.

Suma de jocs

Donats dos jocs G i H, la seva **suma**, $G + H$, és el joc consistent en jugar G i H simultàniament. Naturalment, un joc H és **invers** de G si $G + H = 0$.

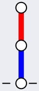
Suma de jocs

Donats dos jocs G i H, la seva **suma**, $G + H$, és el joc consistent en jugar G i H simultàniament. Naturalment, un joc H és **invers** de G si $G + H = 0$.
Considerem el següent exemple:

$G =$ , $H =$ .

Suma de jocs

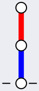
Donats dos jocs G i H, la seva **suma**, $G+H$, és el joc consistent en jugar G i H simultàniament. Naturalment, un joc H és **invers** de G si $G+H=0$.
Considerem el següent exemple:

$G =$  , $H =$  .

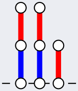
Si juguem el joc G, sempre guanya L, de manera que $G>0$. No obstant això, si juguem $G+H$ sempre guanya R, de manera que $G+H=G-1<0$. Així doncs $0<G<1$. Quin és el seu valor exacte?

Suma de jocs

Donats dos jocs G i H, la seva **suma**, $G+H$, és el joc consistent en jugar G i H simultàniament. Naturalment, un joc H és **invers** de G si $G+H=0$.
Considerem el següent exemple:

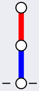
$G=$  , $H=$  .

Si juguem el joc G, sempre guanya L, de manera que $G>0$. No obstant això, si juguem $G+H$ sempre guanya R, de manera que $G+H=G-1<0$. Així doncs $0<G<1$. Quin és el seu valor exacte?

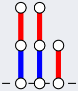
 =2G+H

Suma de jocs

Donats dos jocs G i H, la seva **suma**, $G + H$, és el joc consistent en jugar G i H simultàniament. Naturalment, un joc H és **invers** de G si $G + H = 0$.
Considerem el següent exemple:

$G =$  $, H =$  .

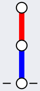
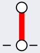
Si juguem el joc G, sempre guanya L, de manera que $G > 0$. No obstant això, si juguem $G + H$ sempre guanya R, de manera que $G + H = G - 1 < 0$. Així doncs $0 < G < 1$. Quin és el seu valor exacte?

 =2G+H

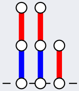
Si juguem $2G + H$ obtenim que el jugador que comença sempre perd. Per tant $2G + H = 0$ de la qual cosa deduïm que $G = -H/2 = 1/2$.

Suma de jocs

Donats dos jocs G i H, la seva **suma**, $G + H$, és el joc consistent en jugar G i H simultàniament. Naturalment, un joc H és **invers** de G si $G + H = 0$.
Considerem el següent exemple:

$G =$  , $H =$  .

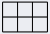
Si juguem el joc G, sempre guanya L, de manera que $G > 0$. No obstant això, si juguem $G + H$ sempre guanya R, de manera que $G + H = G - 1 < 0$. Així doncs $0 < G < 1$. Quin és el seu valor exacte?

 =2G+H

Si juguem $2G + H$ obtenim que el jugador que comença sempre perd. Per tant $2G + H = 0$ de la qual cosa deduïm que $G = -H/2 = 1/2$.
Utilitzant la notació amb parèntesis: $G = \{0|1\} = 1/2$.

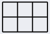
Per practicar

Sabríeu calcular els valors dels següents jocs de tallar pastissos (*n.b.*: L talla horitzontalment i R verticalment)?

$G_1 =$ , $G_2 =$ , $G_3 =$ , $G_4 =$ , $G_5 =$ 

Per practicar

Sabríeu calcular els valors dels següents jocs de tallar pastissos (*n.b.*: L talla horitzontalment i R verticalment)?

$G_1 =$ , $G_2 =$ , $G_3 =$ , $G_4 =$ , $G_5 =$ 

Per canviar el signe d'un joc de hackenbush intercanviem els colors dels segments. Què cal fer per canviar el signe d'un joc de tallar pastissos?

Un exemple motivador

Analitzem a continuació amb més detall el joc G_5 de l'última transparència:

$$= \{-2|1\} = ?$$

Un exemple motivador

Analitzem a continuació amb més detall el joc G_5 de l'última transparència:

$$= \{-2|1\} = ?$$

Si hi juguem, veiem que el jugador que té el segon torn sempre té una estratègia per guanyar. És a dir, el jugador que comença perd. Per tant obtenim que $\{-2|1\} = 0$. La manera intuïtiva d'entendre aquest resultat és que 0 és el número "més senzill" entre -2 i 1.

Un exemple motivador

Analitzem a continuació amb més detall el joc G_5 de l'última transparència:

$$= \{-2|1\} = ?$$

Si hi juguem, veiem que el jugador que té el segon torn sempre té una estratègia per guanyar. És a dir, el jugador que comença perd. Per tant obtenim que $\{-2|1\} = 0$. La manera intuïtiva d'entendre aquest resultat és que 0 és el número "més senzill" entre -2 i 1.

En la formalització dels nombres surreals, que veurem tot seguit, la noció de ser "més senzill" es fa precisa. Concretament tots els números tenen una *data de naixement*. En aquests termes, de tots els nombres entre -2 i 1, el que va néixer abans és el 0.

Definició dels nombres surreals

Els nombres surreals es defineixen de manera recursiva:

Definició

Un **nombre surreal** és una parella $\{L|R\}$ on L, R són dos conjunts de nombres surreals tals que cap membre de L és $\geq$ que algun membre de R.

Definició dels nombres surreals

Els nombres surreals es defineixen de manera recursiva:

Definició

Un **nombre surreal** és una parella $\{L|R\}$ on L, R són dos conjunts de nombres surreals tals que cap membre de L és $\geq$ que algun membre de R.

Definició dels nombres surreals

Els nombres surreals es defineixen de manera recursiva:

Definició

Un **nombre surreal** és una parella $\{L|R\}$ on L, R són dos conjunts de nombres surreals tals que cap membre de L és $\geq$ que algun membre de R.

La relació $\geq$ també es defineix recursivament:

Definició

Donats dos nombres surreals $x \equiv \{L|R\}, x' \equiv \{L'|R'\}$, diem que $x \geq x'$ quan $\nexists a \in R,\ x' \geq a$ i $\nexists a' \in L',\ a' \geq x$.

Definició dels nombres surreals

Els nombres surreals es defineixen de manera recursiva:

Definició

Un **nombre surreal** és una parella $\{L|R\}$ on L, R són dos conjunts de nombres surreals tals que cap membre de L és $\geq$ que algun membre de R.

La relació $\geq$ també es defineix recursivament:

Definició

Donats dos nombres surreals $x \equiv \{L|R\}, x' \equiv \{L'|R'\}$, diem que $x \geq x'$ quan $\nexists a \in R,\ x' \geq a$ i $\nexists a' \in L',\ a' \geq x$.

Definició dels nombres surreals

Els nombres surreals es defineixen de manera recursiva:

Definició

Un **nombre surreal** és una parella $\{L|R\}$ on L, R són dos conjunts de nombres surreals tals que cap membre de L és $\geq$ que algun membre de R.

La relació $\geq$ també es defineix recursivament:

Definició

Donats dos nombres surreals $x \equiv \{L|R\}, x' \equiv \{L'|R'\}$, diem que $x \geq x'$ quan $\nexists a \in R,\ x' \geq a$ i $\nexists a' \in L',\ a' \geq x$.

Observació: a partir de la relació $\geq$ es poden definir les relacions $\leq$, $=$, $>$ i $<$ de la manera habitual (noteu la distinció entre $=$ i $\equiv$).

Aritmètica dels nombres surreals

En els nombres surreals hi podem definir diverses operacions aritmètiques. Suposem que $x \equiv \{L|R\}, x' \equiv \{L'|R'\}$ són nombres surreals. Llavors

$$x + x' \equiv \{x + L', L + x'|x + R', R + x'\}$$

$$-x \equiv \{-R| - L\}$$

$$xx' \equiv \{Lx' + xL' - LL', Rx' + xR' - RR'|Lx' + xR' - LR, Rx' + xL' - RL'\}$$

El 0-èssim nombre surreal

Hem definit els nombres surreals i fins i tot hem vist com definir-hi una aritmètica però encara no n'hem vist cap exemple! Per començar a construir els nombres surreals considerem $L = R = \emptyset$. En efecte $\{\ |\ \}$ compleix trivialment tots els axiomes i, per tant, és un nombre surreal, que denotem amb el símbol 0.

Més nombres surreals

Ara que ja coneixem el nombre surreal 0, podem utilitzar la definició per veure que $\{0|\ \}$ i $\{\ |0\}$ també són nombres surreals. Els denotem respectivament amb els símbols 1 i -1.

Més nombres surreals

Ara que ja coneixem el nombre surreal 0, podem utilitzar la definició per veure que $\{0|\ \}$ i $\{\ |0\}$ també són nombres surreals. Els denotem respectivament amb els símbols 1 i -1.

Exercici: demostrar que $-1 < 0 < 1$.

Més nombres surreals

Ara que ja coneixem el nombre surreal 0, podem utilitzar la definició per veure que $\{0|\ \}$ i $\{\ |0\}$ també són nombres surreals. Els denotem respectivament amb els símbols 1 i -1.

Exercici: demostrar que $-1 < 0 < 1$.

Ara ja podem construir nombres surreals on L i R poden ser qualssevol dels conjunts

$$\{\ \}, \{0\}, \{1\}, \{-1\}, \{0,1\}, \{0,-1\}, \{1,-1\}, \{0,1,-1\}.$$

Més nombres surreals

Ara que ja coneixem el nombre surreal 0, podem utilitzar la definició per veure que $\{0|\ \}$ i $\{\ |0\}$ també són nombres surreals. Els denotem respectivament amb els símbols 1 i -1.

Exercici: demostrar que $-1 < 0 < 1$.

Ara ja podem construir nombres surreals on L i R poden ser qualssevol dels conjunts

$$\{\ \}, \{0\}, \{1\}, \{-1\}, \{0, 1\}, \{0, -1\}, \{1, -1\}, \{0, 1, -1\}.$$

Considerem els casos $\{\ | -1\}, \{1|\ \}, \{-1|0\}, \{0|1\}$. Tots ells satisfan els axiomes i, per tant, són nombres surreals, els quals denotem amb els símbols $-2, 2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$. Qualsevol altra combinació, o no satisfà els axiomes, o dóna un nombre surreal igual a un d'aquests quatre.

Més nombres surreals

Ara que ja coneixem el nombre surreal 0, podem utilitzar la definició per veure que $\{0|\ \}$ i $\{\ |0\}$ també són nombres surreals. Els denotem respectivament amb els símbols 1 i -1.

Exercici: demostrar que $-1 < 0 < 1$.

Ara ja podem construir nombres surreals on L i R poden ser qualssevol dels conjunts

$$\{\ \}, \{0\}, \{1\}, \{-1\}, \{0,1\}, \{0,-1\}, \{1,-1\}, \{0,1,-1\}.$$

Considerem els casos $\{\ |-1\}, \{1|\ \}, \{-1|0\}, \{0|1\}$. Tots ells satisfan els axiomes i, per tant, són nombres surreals, els quals denotem amb els símbols $-2, 2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$. Qualsevol altra combinació, o no satisfà els axiomes, o dóna un nombre surreal igual a un d'aquests quatre.

Algunes propietats: $-2 < -1 < -\frac{1}{2} < 0 < \frac{1}{2} < 1 < 2$, $1+1=2$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

I encara més nombres surreals

Repetint el procés de la transparència anterior podem anar construint successivament tots els nombres racionals diàdics (és a dir, nombres de la forma $\frac{p}{2^q}$ on p, q són enters).

I encara més nombres surreals

Repetint el procés de la transparència anterior podem anar construint successivament tots els nombres racionals diàdics (és a dir, nombres de la forma $\frac{p}{2^q}$ on p, q són enters). Aquests són tots els nombres que ens apareixen després d'un nombre finit de *dies* (passos), però encara podem anar més enllà utilitzant conjunts infinits de nombres ja construïts per aconseguir nous nombres. Així, per exemple,

I encara més nombres surreals

Repetint el procés de la transparència anterior podem anar construint successivament tots els nombres racionals diàdics (és a dir, nombres de la forma $\frac{p}{2^q}$ on p, q són enters). Aquests són tots els nombres que ens apareixen després d'un nombre finit de *dies* (passos), però encara podem anar més enllà utilitzant conjunts infinits de nombres ja construïts per aconseguir nous nombres. Així, per exemple,

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots | \ \}$$

$$\frac{1}{3} = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{4} + \frac{1}{16}, \frac{1}{4} + \frac{1}{64}, \ldots | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{8}, \ldots\}$$

I encara més nombres surreals

Repetint el procés de la transparència anterior podem anar construint successivament tots els nombres racionals diàdics (és a dir, nombres de la forma $\frac{p}{2^q}$ on p, q són enters). Aquests són tots els nombres que ens apareixen després d'un nombre finit de *dies* (passos), però encara podem anar més enllà utilitzant conjunts infinits de nombres ja construïts per aconseguir nous nombres. Així, per exemple,

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots | \ \}$$

$$\frac{1}{3} = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{4} + \frac{1}{16}, \frac{1}{4} + \frac{1}{64}, \ldots | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{8}, \ldots\}$$

De fet tots els nombres reals definits per Dedekind són talladures de nombres racionals diàdics i, per tant, també neixen aquest dia.

I encara més nombres surreals

Repetint el procés de la transparència anterior podem anar construint successivament tots els nombres racionals diàdics (és a dir, nombres de la forma $\frac{p}{2^q}$ on p, q són enters). Aquests són tots els nombres que ens apareixen després d'un nombre finit de *dies* (passos), però encara podem anar més enllà utilitzant conjunts infinits de nombres ja construïts per aconseguir nous nombres. Així, per exemple,

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots |\ \}$$

$$\frac{1}{3} = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{4} + \frac{1}{16}, \frac{1}{4} + \frac{1}{64}, \dots | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{8}, \dots\}$$

De fet tots els nombres reals definits per Dedekind són talladures de nombres racionals diàdics i, per tant, també neixen aquest dia. Utilitzant els nous nombres que hem obtingut podem anar creant nous nombres surreals i així successivament.

Ordre de naixement

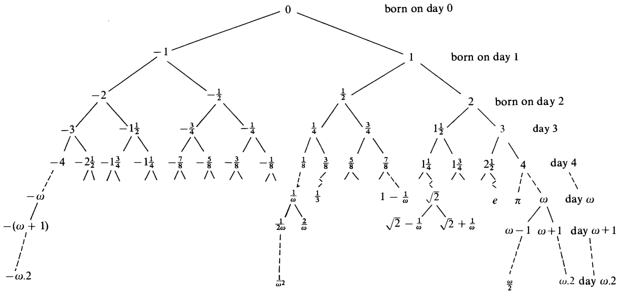


FIG. 0. When the first few numbers were born.

Propietats dels nombres surreals

Els nombres surreals satisfan una bona colla de propietats:

Propietats dels nombres surreals

Els nombres surreals satisfan una bona colla de propietats:

- Suma:

$$x + 0 \equiv x$$

$$x + y \equiv y + x$$

$$(x + y) + z \equiv x + (y + z)$$

$$x + y \geq x + z \Leftrightarrow y \geq z$$

Propietats dels nombres surreals

Els nombres surreals satisfan una bona colla de propietats:

- Suma:

$$x + 0 \equiv x$$

$$x + y \equiv y + x$$

$$(x + y) + z \equiv x + (y + z)$$

$$x + y \geq x + z \Leftrightarrow y \geq z$$

- Negació:

$$-(x + y) \equiv -x + (-y)$$

$$-(-x) \equiv x$$

$$x + (-x) = 0$$

Propietats dels nombres surreals (cont.)

- Producte:

$$x0 \equiv 0, \;\; x1 \equiv x, \;\; xy \equiv yx$$

$$(-x)y \equiv x(-y) \equiv -xy$$

$$(xy)z = x(yz)$$

$$(x+y)z = xz + yz$$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow x_1 y = x_2 y$$

$$x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2 \Rightarrow x_1 y_2 + x_2 y_1 \leq x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Propietats dels nombres surreals (cont.)

- Producte:

$$x0 \equiv 0, \;\; x1 \equiv x, \;\; xy \equiv yx$$

$$(-x)y \equiv x(-y) \equiv -xy$$

$$(xy)z = x(yz)$$

$$(x+y)z = xz + yz$$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow x_1 y = x_2 y$$

$$x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2 \Rightarrow x_1 y_2 + x_2 y_1 \leq x_1 y_1 + x_2 y_2$$

- Divisió: Per tot nombre surreal $x \neq 0$ existeix un nombre surreal y tal que $xy = 1$.

Propietats dels nombres surreals (cont.)

- Producte:

$$x0 \equiv 0, \ \ x1 \equiv x, \ \ xy \equiv yx$$

$$(-x)y \equiv x(-y) \equiv -xy$$

$$(xy)z = x(yz)$$

$$(x+y)z = xz + yz$$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow x_1 y = x_2 y$$

$$x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2 \Rightarrow x_1 y_2 + x_2 y_1 \leq x_1 y_1 + x_2 y_2$$

- Divisió: Per tot nombre surreal $x \neq 0$ existeix un nombre surreal y tal que $xy = 1$.

Propietats dels nombres surreals (cont.)

- Producte:

$$x0 \equiv 0,\ \ x1 \equiv x,\ \ xy \equiv yx$$

$$(-x)y \equiv x(-y) \equiv -xy$$

$$(xy)z = x(yz)$$

$$(x+y)z = xz + yz$$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow x_1 y = x_2 y$$

$$x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2 \Rightarrow x_1 y_2 + x_2 y_1 \leq x_1 y_1 + x_2 y_2$$

- Divisió: Per tot nombre surreal $x \neq 0$ existeix un nombre surreal y tal que $xy = 1$.

En resum, els nombres surreals tenen estructura de cos totalment ordenat.

Propietats dels nombres surreals (cont.)

- Producte:

$$x0 \equiv 0,\ \ x1 \equiv x,\ \ xy \equiv yx$$

$$(-x)y \equiv x(-y) \equiv -xy$$

$$(xy)z = x(yz)$$

$$(x+y)z = xz + yz$$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow x_1 y = x_2 y$$

$$x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2 \Rightarrow x_1 y_2 + x_2 y_1 \leq x_1 y_1 + x_2 y_2$$

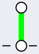
- Divisió: Per tot nombre surreal $x \neq 0$ existeix un nombre surreal y tal que $xy = 1$.

En resum, els nombres surreals tenen estructura de cos totalment ordenat.

Entre d'altres, els nombres surreals contenen tots els nombres reals i també tots els ordinals. De fet, els nombres surreals formen una classe pròpia.

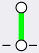
El joc *

Considerem una generalització del hackenbush on ara també hi tenim segments de color verd que poden ser tallats indistintament per L i per R. Quant val el següent joc?



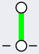
El joc *

Considerem una generalització del hackenbush on ara també hi tenim segments de color verd que poden ser tallats indistintament per L i per R. Quant val el següent joc?

 $= \{0|0\}$

El joc *

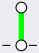
Considerem una generalització del hackenbush on ara també hi tenim segments de color verd que poden ser tallats indistintament per L i per R. Quant val el següent joc?



$$= \{0|0\} =: *$$

El joc *

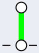
Considerem una generalització del hackenbush on ara també hi tenim segments de color verd que poden ser tallats indistintament per L i per R. Quant val el següent joc?

 $= \{0|0\} =: *$

Aquest joc el guanya el jugador que comença la partida. A un joc G que satisfaci aquesta condició l'anomem *fuzzy* i ho denotem $G \| 0$. De seguida veurem que $*$ no és l'únic joc que és *fuzzy*.

El joc *

Considerem una generalització del hackenbush on ara també hi tenim segments de color verd que poden ser tallats indistintament per L i per R. Quant val el següent joc?

 $= \{0|0\} =: *$

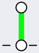
Aquest joc el guanya el jugador que comença la partida. A un joc G que satisfaci aquesta condició l'anomem *fuzzy* i ho denotem $G \| 0$. De seguida veurem que $*$ no és l'únic joc que és *fuzzy*.

Teorema

Un joc G satisfà una i només una de les següents quatre condicions:

El joc *

Considerem una generalització del hackenbush on ara també hi tenim segments de color verd que poden ser tallats indistintament per L i per R. Quant val el següent joc?



$$= \{0|0\} =: *$$

Aquest joc el guanya el jugador que comença la partida. A un joc G que satisfaci aquesta condició l'anomem *fuzzy* i ho denotem $G \| 0$. De seguida veurem que $*$ no és l'únic joc que és *fuzzy*.

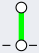
Teorema

Un joc G satisfà una i només una de les següents quatre condicions:

- $G = 0$: *el jugador que comença perd.*

El joc *

Considerem una generalització del hackenbush on ara també hi tenim segments de color verd que poden ser tallats indistintament per L i per R. Quant val el següent joc?

 $= \{0|0\} =: *$

Aquest joc el guanya el jugador que comença la partida. A un joc G que satisfaci aquesta condició l'anomem *fuzzy* i ho denotem $G \| 0$. De seguida veurem que $*$ no és l'únic joc que és *fuzzy*.

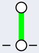
Teorema

Un joc G satisfà una i només una de les següents quatre condicions:

- $G = 0$: *el jugador que comença perd.*
- $G > 0$: *sempre guanya L.*

El joc *

Considerem una generalització del hackenbush on ara també hi tenim segments de color verd que poden ser tallats indistintament per L i per R. Quant val el següent joc?

 $= \{0|0\} =: *$

Aquest joc el guanya el jugador que comença la partida. A un joc G que satisfaci aquesta condició l'anomem *fuzzy* i ho denotem $G \| 0$. De seguida veurem que $*$ no és l'únic joc que és *fuzzy*.

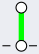
Teorema

Un joc G satisfà una i només una de les següents quatre condicions:

- $G = 0$: *el jugador que comença perd.*
- $G > 0$: *sempre guanya L.*
- $G < 0$: *sempre guanya R.*

El joc *

Considerem una generalització del hackenbush on ara també hi tenim segments de color verd que poden ser tallats indistintament per L i per R. Quant val el següent joc?

 $= \{0|0\} =: *$

Aquest joc el guanya el jugador que comença la partida. A un joc G que satisfaci aquesta condició l'anomem *fuzzy* i ho denotem $G\|0$. De seguida veurem que $*$ no és l'únic joc que és *fuzzy*.

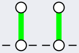
Teorema

Un joc G satisfà una i només una de les següents quatre condicions:

- $G = 0$*: el jugador que comença perd.*
- $G > 0$*: sempre guanya* L*.*
- $G < 0$*: sempre guanya* R*.*
- $G\|0$*: el jugador que comença guanya.*

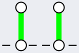
Algunes propietats del joc *

Quant val $* + *$?



Algunes propietats del joc *

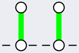
Quant val $* + *$?



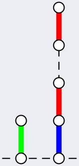
Veiem que el jugador que comença perd. Per tant $* + * = 0$. En la notació de parèntesis, $\{*|*\} = 0$.

Algunes propietats del joc *

Quant val $* + *$?



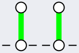
Veiem que el jugador que comença perd. Per tant $* + * = 0$. En la notació de parèntesis, $\{*|*\} = 0$.
Considerem ara el següent joc:



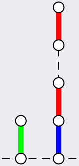
on hi ha n segments vermells.

Algunes propietats del joc *

Quant val $* + *$?



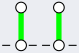
Veiem que el jugador que comença perd. Per tant $* + * = 0$. En la notació de parèntesis, $\{*|*\} = 0$.
Considerem ara el següent joc:



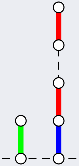
on hi ha n segments vermells. Aquest joc, que és $* + 1/2^n$, sempre el guanya L i, per tant, és positiu.

Algunes propietats del joc *

Quant val $* + *$?



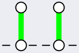
Veiem que el jugador que comença perd. Per tant $* + * = 0$. En la notació de parèntesis, $\{*|*\} = 0$.
Considerem ara el següent joc:



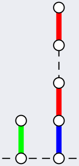
on hi ha n segments vermells. Aquest joc, que és $* + 1/2^n$, sempre el guanya L i, per tant, és positiu. Obtenim que $-1/2^n < *$.

Algunes propietats del joc *

Quant val $* + *$?



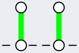
Veiem que el jugador que comença perd. Per tant $* + * = 0$. En la notació de parèntesis, $\{*|*\} = 0$.
Considerem ara el següent joc:



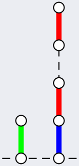
on hi ha n segments vermells. Aquest joc, que és $* + 1/2^n$, sempre el guanya L i, per tant, és positiu. Obtenim que $-1/2^n < *$. Intercanviant els colors blau i vermell s'obté $* < 1/2^n$.

Algunes propietats del joc *

Quant val $* + *$?



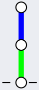
Veiem que el jugador que comença perd. Per tant $* + * = 0$. En la notació de parèntesis, $\{*|*\} = 0$.
Considerem ara el següent joc:



on hi ha n segments vermells. Aquest joc, que és $* + 1/2^n$, sempre el guanya L i, per tant, és positiu. Obtenim que $-1/2^n < *$. Intercanviant els colors blau i vermell s'obté $* < 1/2^n$. Com que aquest resultat és vàlid per a qualsevol n, tenim que $*$ és un infinitèsim.

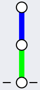
Altres jocs *fuzzy*

Considerem el joc

$G =$  .

Altres jocs *fuzzy*

Considerem el joc

$G =$  .

Tenim que $G \| 0$. De tota manera, és fàcil veure que $G + * > 0$ ja que sempre guanya L. En particular $G \neq *$, la qual cosa demostra que hi ha jocs fuzzy diferents de $*$. En aquest cas particular, notem que $G = \{*, 0 | 0\}$.

Com es juga al Nim?

En el Nim tenim diverses files (o columnes, piles, munts, etc.) de monedes (o llumins, pedres, escuradents, etc.). Les regles del joc són que a cada torn un jugador pot treure tantes monedes com desitgi d'una única de les files. Com sempre, el jugador que no pot fer més moviments perd. O, si es vol, el jugador que retira l'última moneda guanya.

Com es juga al Nim?

En el Nim tenim diverses files (o columnes, piles, munts, etc.) de monedes (o llumins, pedres, escuradents, etc.). Les regles del joc són que a cada torn un jugador pot treure tantes monedes com desitgi d'una única de les files. Com sempre, el jugador que no pot fer més moviments perd. O, si es vol, el jugador que retira l'última moneda guanya.

1) *ooooo*
2) *ooooooo*
3) *oooo*

Un exemple de Nim

Tot representant el Nim

Si un joc de Nim té una única fila amb una única moneda, tant L com R només poden aconseguir el joc 0, de manera que el joc és $\{0|0\} = *$.

Tot representant el Nim

Si un joc de Nim té una única fila amb una única moneda, tant L com R només poden aconseguir el joc 0, de manera que el joc és $\{0|0\} = *$.

Suposem ara que tenim una única fila amb dues monedes. Llavors tant L com R o bé juguen a la posició 0 (si retiren ambdues monedes) o bé juguen a la posició $*$ (si només en retiren una). D'aquesta manera el resultat del joc és $\{0, *|0, *\} =: 2^*$.

Tot representant el Nim

Si un joc de Nim té una única fila amb una única moneda, tant L com R només poden aconseguir el joc 0, de manera que el joc és $\{0|0\} = *$.

Suposem ara que tenim una única fila amb dues monedes. Llavors tant L com R o bé juguen a la posició 0 (si retiren ambdues monedes) o bé juguen a la posició $*$ (si només en retiren una). D'aquesta manera el resultat del joc és $\{0, *|0, *\} =: 2^*$.

Més en general podem definir de manera recursiva el joc d'una sola fila amb n monedes:

$$n^* := \{0, *, 2^*, \ldots, (n-1)^*|0, *, 2^*, \ldots, (n-1)^*\}.$$

Tot representant el Nim

Si un joc de Nim té una única fila amb una única moneda, tant L com R només poden aconseguir el joc 0, de manera que el joc és $\{0|0\} = *$.

Suposem ara que tenim una única fila amb dues monedes. Llavors tant L com R o bé juguen a la posició 0 (si retiren ambdues monedes) o bé juguen a la posició $*$ (si només en retiren una). D'aquesta manera el resultat del joc és $\{0, *|0, *\} =: 2^*$.

Més en general podem definir de manera recursiva el joc d'una sola fila amb n monedes:

$$n^* := \{0, *, 2^*, \dots, (n-1)^*|0, *, 2^*, \dots, (n-1)^*\}.$$

Com que jugar al Nim amb diverses files no és res més que jugar cadascuna de les seves files simultàniament, l'expressió general d'un joc de Nim serà de la forma

$$n_1^* + \cdots + n_r^*,$$

on r és el nombre de files i n_i la quantitat de monedes de la fila i-èssima (òbviament $1^* := *$).

Sumant files

Vegem alguns exemples il·lustratius de jocs de Nim:

- $1^* + 1^* = * + * = 0$

Sumant files

Vegem alguns exemples il·lustratius de jocs de Nim:

- $1^* + 1^* = * + * = 0$
- Més en general, $n^* + n^* = 0$. Veieu per què?

Sumant files

Vegem alguns exemples il·lustratius de jocs de Nim:

- $1^* + 1^* = * + * = 0$
- Més en general, $n^* + n^* = 0$. Veieu per què?
- $1^* + 2^* + 3^* = 0$. Sabríeu demostar-ho?

Sumant files

Vegem alguns exemples il·lustratius de jocs de Nim:

- $1^* + 1^* = * + * = 0$
- Més en general, $n^* + n^* = 0$. Veieu per què?
- $1^* + 2^* + 3^* = 0$. Sabríeu demostar-ho?

Sumant files

Vegem alguns exemples il·lustratius de jocs de Nim:

- $1^* + 1^* = * + * = 0$
- Més en general, $n^* + n^* = 0$. Veieu per què?
- $1^* + 2^* + 3^* = 0$. Sabríeu demostar-ho?

La clau per guanyar al Nim és el següent resultat:

Proposició

Si $k_1, \ldots, k_s$ són enters no negatius i diferents dos a dos, es té que

$$(2^{k_1})^* + \cdots + (2^{k_s})^* = (2^{k_1} + \cdots + 2^{k_s})^*.$$

Com guanyar al Nim

Coneixent el resultat anterior guanyar al Nim és ben fàcil:

Com guanyar al Nim

Coneixent el resultat anterior guanyar al Nim és ben fàcil:

1. Per conèixer el valor del nostre joc cal representar cadascun dels nombres com a suma de diferents potències de 2 i sumar-los tots tenint en compte les cancel·lacions de potències iguals. Vegem-ne un exemple:

$$4^* + 5^* + 7^* = 4^* + (1+4)^* + (1+2+4)^* =$$

$$= 4^* + 1^* + 4^* + 1^* + 2^* + 4^* = 2^* + 4^* = (2+4)^* = 6^*.$$

Com guanyar al Nim

Coneixent el resultat anterior guanyar al Nim és ben fàcil:

1. Per conèixer el valor del nostre joc cal representar cadascun dels nombres com a suma de diferents potències de 2 i sumar-los tots tenint en compte les cancel·lacions de potències iguals. Vegem-ne un exemple:

$$4^* + 5^* + 7^* = 4^* + (1+4)^* + (1+2+4)^* =$$

$$= 4^* + 1^* + 4^* + 1^* + 2^* + 4^* = 2^* + 4^* = (2+4)^* = 6^*.$$

2. En el nostre torn retirem el nombre de monedes adequat per tal que el joc valgui 0, de manera que el jugador que comenci (el nostre oponent) perdi. En l'exemple anterior si retirem 6 monedes de la fila de 7 obtenim:

$$4^* + 5^* + 1^* = 4^* + (1+4)^* + 1^* = 4^* + 1^* + 4^* + 1^* = 0.$$

Fi

Moltes gràcies per la vostra atenció!