

1. Espais vectorials

Exercici 1. Determineu quins dels conjunts següents són subespais vectorials de $\mathbb{R}^n$.

- (a) $F_a := \mathbb{R}^n \setminus \{(2, \dots, 2)\}$, $n \geq 1$.
- (b) $F_b := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + \dots + x_n = 0\}$, $n \geq 1$.
- (c) $F_c := \mathbb{R}^n \setminus \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + \dots + x_n = 0\}$, $n \geq 1$.
- (d) $F_d := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + \dots + x_n = 1\}$, $n \geq 1$.
- (e) $F_e := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + 3x_n = 0\}$, $n \geq 1$.
- (f) $F_f := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \cdot x_2 = 1\}$, $n \geq 2$.
- (g) $F_g := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \cdot x_2 \neq 1\}$, $n \geq 2$.
- (h) $F_h := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 2x_1 + x_2 = \sqrt{2}x_1\}$, $n \geq 2$.
- (i) $F_i := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1x_2 + x_3 = x_1\}$, $n \geq 3$.
- (j) $F_j := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2^2 + x_3^3 = 0\}$, $n \geq 3$.

Exercici 2. Determineu quins dels conjunts següents són subespais vectorials de $\mathbb{R}[x]$.

- (a) $F_a := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : p(3) = 0\}$.
- (b) $F_b := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : p'(3) = 0\}$, on $p'(x)$ indica el polinomi derivat del polinomi $p(x)$.
- (c) $F_c := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : \int_0^1 p(x)dx \leq 100\}$.
- (d) $F_d := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : \int_0^1 p(x)dx = 0\}$.
- (e) $F_e := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : \text{gr}(p(x)) \text{ és parell}\}$.
- (f) $F_f := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : \text{gr}(p(x)) > 4\}$.
- (g) $F_g := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : \text{gr}(p(x)) < 23\}$.
- (h) $F_h := \{p(x^2) : p(x) \in \mathbb{R}[x]\}$.

Exercici 3. Per a $m, n \geq 1$, determineu quins dels conjunts següents són subespais vectorials de $E := \mathbf{M}(m, n, \mathbb{R})$ amb l'estructura usual d'aquest conjunt de matrius (m files, n columnes i coeficients en $\mathbb{R}$) com a $\mathbb{R}$ -espai vectorial.

- (a) $F_a := \{A = [a_{i,j}] \in E : a_{1,1} = 0\}$.
- (b) $F_b := \{A = [a_{i,j}] \in E : a_{1,1} + a_{1,2} = 0\}$.
- (c) $F_c := \{A = [a_{i,j}] \in E : \text{tr}(A) = 0\}$, on $\text{tr}(A)$ denota la suma dels elements situats a les posicions (i, j) amb $i = j$. (Noteu que si $n = m$, això és la traça de la matriu A .)
- (d) $F_d := \{A = [a_{i,j}] \in E : a_{i,j} = 2\pi, \forall i, j\}$.

(e) $F_e := \{A \in E : A = A^t\}$, on A^t indica la matriu transposada de la matriu A .

(f) $F_f := \{A \in E : A = -A^t\}$.

Exercici 4. Denotem per $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ el conjunt de totes les aplicacions de X en $\mathbb{R}$ (de vegades també se'l denota com $\mathbb{R}^X$). Per a $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, es defineixen la suma de f i g , $f + g$, i el producte de λ per f , $\lambda \cdot f$ per les fórmules

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot (f(x)),$$

per a tot $x \in X$. Proveu que $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ és un espai vectorial amb aquesta suma i aquest producte per escalars.

Exercici 5. Determineu quins dels conjunts següents són subespais vectorials de l'espai vectorial de les funcions $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(a) $F_a := \{f \in E : \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)\}$.

(b) $F_b := \{f \in E : \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)\}$.

(c) $F_c := \{f \in E : \forall x \in \mathbb{R}, f(x^2) = (f(x))^2\}$.

(d) $F_d := \{f \in E : \forall x \in \mathbb{R}, f(5 - x) = f(x)\}$.

(e) $F_e := \{f \in E : f(\pi) = 0\}$.

(f) $F_f := \{f \in E : f(\pi) = \pi\}$.

(g) $F_g := \{f \in E : f(0) = f(1)\}$.

(h) $F_h := \{f \in E : \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, f(x) = 0, \text{ i } f(0) \neq 0\}$.

(i) $F_i := \{f \in E : \forall x \in \mathbb{R}, \text{ llevat d'una quantitat finita, } f(x) = 0\}$.

(j) $F_j := \{f \in E : \forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq |f(x)| \leq 1\}$.

Exercici 6. Sigui $E := \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Expresseu, si és possible, els elements f_i següents de E com a combinació lineal de la família F_i corresponent, i de totes les maneres possibles.

(a) $f_a = \sin x$; $F_a = \{1, x, x^2, \dots\}$.

(b) $f_b = 1$; $F_b = \{x + 1, x^2 - 1, x^3 + 1\}$.

(c) $f_c = x^2 + x - 1$; $F_c = \{1, x - 1, (x - 1)^2\}$.

(d) $f_d = 0$; $F_d = \{(x + 1)^2, x, x^2 + 2, \sqrt{3}\}$.

Exercici 7. Determineu quins dels conjunts següents de matrius són linealment dependents en l'espai de matrius $\mathbf{M}(m, n, \mathbb{R})$ corresponent.

(a) $S_a := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(b) $S_b := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \right\}$.

Exercici 8. Determineu quins dels subconjunts següents de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ són linealment independents.

- (a) $S_a := \{\sin x, \cos x, 1\}$.
- (b) $S_b := \{e^x, e^{x+1}\}$.
- (c) $S_c := \{e^x, e^{-x}, 1\}$.
- (d) $S_d := \{e^{a_i x} : 1 \leq i \leq n\}$, on $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Exercici 9. Sigui $E := \mathbb{R}[x]$. Determineu quins dels subconjunts següents de E són linealment independents i trobeu bases dels subespais, $\langle S_j \rangle$, que generen.

- (a) $S_a := \{1, x, x^2, \dots\}$.
- (b) $S_b := \{x - 1, x^2 - 1, x - 2\}$.
- (c) $S_c := \{1, x - 1, x^2 - 2, \dots, x^n - n\}$.
- (d) $S_d := \{1 + x + x^2, 1 + x + x^3, 1 + x\}$.
- (e) $S_e := \{1, (x - 1), (x - 1)^2, \dots, (x - 1)^n\}$.
- (f) $S_f := \{x^3 - 1, x^2, x^4 - 1, x^4 - x^3 + x^2\}$.

Exercici 10. Sigui $E := \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$, el conjunt dels polinomis de grau menor o igual que 3 i coeficients reals. Proveu que el subconjunt F de E dels polinomis $p(x)$ tals que

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = p(0)$$

és un subespai vectorial de E . Trobeu una base de F i un sistema d'equacions que defineixi F en la base $(1, x, x^2, x^3)$ de E .

Exercici 11. Siguin $n \in \mathbb{N}$, $E_n := \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ l'espai vectorial dels polinomis de grau menor o igual que n , i $a \in \mathbb{R}$. Proveu que el conjunt ordenat de polinomis $\mathcal{B}_n := (p_0(x), \dots, p_n(x))$, on $p_i(x) := \frac{1}{i!}(x - a)^i$, $0 \leq i \leq n$, és una base de E_n . Comproveu que, si $D^i(p, a)$ denota el valor en $x = a$ del polinomi derivat i -èsim del polinomi $p(x) \in E_n$, aleshores

$$p(x) = \sum_{i=0}^n D^i(p, a) \frac{1}{i!} (x - a)^i;$$

és a dir, les coordenades de $p(x) \in E_n$ en la base $\mathcal{B}_n$ són

$$(D^0(p, a), D^1(p, a), D^2(p, a), \dots, D^n(p, a)).$$

Exercici 12. Sigui $E := \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'espai vectorial de les successions de nombres reals. Per a una successió $a \in E$, és habitual escriure $a_n := a(n)$ i indicar a per $\{a_n\}_n$ o, simplement, per $\{a_n\}$. Sigui $F := \{a \in E : \forall n \geq 0, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\}$.

- (a) Proveu que F és un subespai vectorial de E . Calculeu la dimensió de F i determineu-ne una base.

- (b) Una successió $a = \{a_n\}$ s'anomena *progressió geomètrica de raó* $r \in \mathbb{R}$ si, per a tot $n \geq 0$, $a_{n+1} = r \cdot a_n$. Trobeu la raó de les progressions geomètriques contingudes a F .
- (c) Comproveu que existeix una base de F formada per progressions geomètriques i doneu-ne una.
- (d) Expressen la successió de Fibonacci $f \in F$ determinada per $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ en la base obtinguda en l'apartat anterior. Expressen el terme general f_n de f de forma no recurrent, és a dir, com a funció només de n , f_0 i f_1 .

Exercici 13. Considerem la base $B = (1, x, x^2, x^3)$ de l'espai vectorial $E := \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ dels polinomis de grau menor o igual que 3.

- (a) Calculeu la dimensió, una base i equacions en la base B del subespai

$$F := \langle x + 1, x - 2, x^3 + x^2, 2x^3 + 2x^2 + x + 3 \rangle.$$

- (b) Determineu per a quins valors de α el conjunt $G := \{p(x) \in E : p'(0) = \alpha\}$ és un subespai vectorial de E . Per aquests valors calculeu la dimensió, una base i equacions de G .
- (c) En els casos en què G és subespai vectorial, calculeu la dimensió, una base i equacions de $F \cap G$ i de $F + G$. És directa la suma $F + G$?

Exercici 14. Demostreu que el conjunts següents són subespais de $E = \mathbf{M}(2, 2, \mathbb{R})$.

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in E : x + t = 0 \right\} \quad G := \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in E : y = -z, x = t \right\}.$$

Determineu una base de $F \cap G$ i amplieu-la a una base de F i a una base de G . Determineu una base de $F + G$. Comproveu la fórmula de Grassmann en aquest cas particular.

Exercici 15. Proveu que l'espai vectorial de les matrius quadrades $\mathbf{M}(n, n, \mathbb{R})$ és suma directa del subespai de les matrius simètriques i el subespai de les matrius antisimètriques.

Exercici 16. En $\mathbf{M}(2, 3, \mathbb{R})$, es consideren els subespais

$$F := \left\langle \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 & 1 & 11 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad G := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} : a = b, c + d = 0 \right\}.$$

- (a) Determineu equacions per a F .
- (b) Determineu una base de G .
- (c) Demostreu que $\mathbf{M}(2, 3, \mathbb{R}) = F \oplus G$.
- (d) Doneu la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ com a suma d'una matriu de F i una de G .

Exercici 17. Considereu els subconjunts $\mathcal{F}_0$, de les funcions parelles, i $\mathcal{F}_1$, de les funcions senars, de l'espai vectorial de les funcions $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$\mathcal{F}_0 := \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(x) = f(-x) \forall x\}, \quad \mathcal{F}_1 := \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(x) = -f(-x) \forall x\}.$$

Demostreu que $\mathcal{F}_0$ i $\mathcal{F}_1$ són subespais vectorials i proveu que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_1$.

Exercici 18. Sigui, $E := \mathbb{R}[x]_{\leq n}$, $a \in \mathbb{R}$, i V_a el conjunt dels polinomis de E que tenen a com a arrel.

- (a) Proveu que V_a és un subespai vectorial de E i determineu-ne una base.
- (b) Proveu que si $a \neq b$, aleshores $V_a + V_b = E$.
- (c) Doneu una base de $V_a \cap V_b$.

Exercici 19. Siguin F , G i H subespais d'un espai vectorial E . Determineu si són certes les afirmacions següents.

- (a) $F \cap G = F \cap H$ i $F + G = F + H \Rightarrow G = H$.
- (b) $F \cap (H + G) = (F \cap H) + (F \cap G)$.
- (c) $F \cap (H + (F \cap G)) = (F \cap H) + (F \cap G)$.

Exercici 20. Siguin F i G subespais vectorials d'un espai vectorial E de dimensió finita n .

- (a) Proveu que si $\dim F + \dim G > n$, aleshores $F \cap G \neq \{0\}$.
- (b) Proveu que si $\dim F + \dim G < n$, aleshores $F + G \neq E$.
- (c) Estudieu si són certes les implicacions recíproques.

Exercici 21. Siguin F i G subespais d'un espai vectorial E . Proveu que

$$F \cup G \text{ és subespai} \Leftrightarrow F \subseteq G \text{ o bé } G \subseteq F.$$

Exercici 22. Siguin F i G subespais d'un espai vectorial E tals que $E = F + G$, i sigui H un suplementari de $F \cap G$ en F ; és a dir, $F = (F \cap G) \oplus H$. Proveu que H és un suplementari de G en E ; és a dir, que $E = G \oplus H$.

Exercici 23. Siguin E un espai vectorial i F un subespai vectorial de E . Proveu que, per a $v_1, \dots, v_k \in E$, les classes $v_1 + F, \dots, v_k + F \in E/F$ són linealment independents si, i només si,

$$\dim \langle v_1, \dots, v_k \rangle = k \quad \text{i} \quad \langle v_1, \dots, v_k \rangle \cap F = \{0\}.$$

Exercici 24. Sigui (v_1, v_2, v_3) una base de $\mathbb{R}^3$ i suposem donats vectors

$$w_1 \in \langle v_2, v_3 \rangle, \quad w_2 \in \langle v_1, v_3 \rangle, \quad w_3 \in \langle v_1, v_2 \rangle.$$

Esbrineu si existeix un vector $w \in \mathbb{R}^3$ tal que la seva classe en $\mathbb{R}^3 / \langle v_j \rangle$ coincideix amb la classe de w_j en els dos casos $j = 1, 2$. I en els tres casos $j = 1, 2, 3$?

Exercici 25. Sigui $E := \mathbb{R}^4$,

$$F := \langle (0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 2) \rangle \subset E, \quad \text{i} \quad G := \{(x, y, z, t) \in E : x - y + z = 0, x - y = 0\}.$$

- (a) Calculeu les dimensions de F , G , $F \cap G$ i $F + G$ i doneu bases de cadascun dels subespais.
- (b) Determineu una base de cadascun dels espais quocient $F/(F \cap G)$, $G/(F \cap G)$, E/F , E/G , $E/(F \cap G)$ i $E/(F + G)$.

Exercici 26. Sigui $E := \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$, i considerem els subespais

$$F := \langle x, x(x-1), x(x-1)(x-2) \rangle, \quad G := \{p(x) \in E : p(-1) = 0\}.$$

- (a) Calculeu les dimensions de $F \cap G$ i $F + G$ i doneu-ne bases i equacions.
- (b) Doneu una base de cada un dels espais E/F , E/G , $E/(F \cap G)$ i $E/(F + G)$. Considereu en cadascun la classe del polinomi constant 1 i determineu les seves coordenades en la base que hagueu triat.
- (c) Doneu una base dels espais quocient $F/(F \cap G)$, $G/(F \cap G)$ i $(F + G)/(F \cap G)$.

Exercici 27. Sigui $F \subseteq E = \mathbf{M}(2, 2, \mathbb{R})$ el subespai generat per les matrius $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, i $G \subseteq E$ el subespai format per les matrius $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tals que $x + t = 0$.

- (a) Doneu una base de cadascun dels subespais F , G , $F \cap G$ i $F + G$.
- (b) Doneu bases dels espais E/F , E/G , $G/(F \cap G)$ i $F/(F \cap G)$.
- (c) Doneu les coordenades de la classe de la matriu identitat en E/F per a la base que heu donat en l'apartat anterior.

Exercici 28. Siguin F i G els subespais de $E := \mathbf{M}(n, n, \mathbb{R})$ formats per les matrius diagonals i per les matrius triangulars inferiors, respectivament. Doneu bases dels espais quocient E/F i E/G . Determineu les coordenades de la classe d'una matriu $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ en cadascun d'aquests espais quocient, en les bases que hagueu triat.