

2. Aplicacions lineals

Exercici 1. Sigui $B \in \mathbf{M}(n, m, \mathbb{R})$ una matriu fixa. Determineu quines de les aplicacions següents són lineals.

- (a) $\text{tr} : \mathbf{M}(n, n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida per $\text{tr}(A) := \text{traça de } A$, per a tota matriu $A \in \mathbf{M}(n, n, \mathbb{R})$. Recordem que la traça de la matriu quadrada A és la suma dels elements de la diagonal principal de la matriu A .
- (b) $\det : \mathbf{M}(n, n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, donada per $\det(A) := \text{determinant de } A$, per a tota matriu $A \in \mathbf{M}(n, n, \mathbb{R})$. Recordem que el determinant de la matriu quadrada $A = [a_{i,j}]_{i,j}$ admet l'expressió

$$\det(A) = \sum_{\sigma} \text{sig}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)},$$

el producte està a totes les permutacions σ de $\{1, 2, \dots, n\}$, i on $\text{sig}(\sigma)$ és el signe de la permutació σ .

- (c) $R_B : \mathbf{M}(l, n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{M}(l, m, \mathbb{R})$, donada per $R_B(A) := A \cdot B$, per a tota matriu $A \in \mathbf{M}(l, n, \mathbb{R})$; és a dir, la multiplicació per la dreta per B .
- (d) $L_B : \mathbf{M}(m, l, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{M}(n, l, \mathbb{R})$, donada per $L_B(A) := B \cdot A$, per a tota matriu $A \in \mathbf{M}(m, l, \mathbb{R})$; és a dir, la multiplicació per l'esquerra per B .

Exercici 2. Siguin E un espai vectorial de dimensió 3, (v_1, v_2, v_3) una base de E , i considerem els vectors

$$u_1 := v_1 - v_2 + v_3, \quad u_2 := v_1 - v_3, \quad u_3 := -v_2 + v_3, \quad u_4 := 2v_1 - 2v_2 + v_3.$$

Determineu tots els valors possibles de $a \in \mathbb{R}$ de manera que existeixi una aplicació lineal $f : E \longrightarrow E$ tal que

$$f(u_1) = u_1, \quad f(u_2) = u_2, \quad f(u_3) = u_1 + u_2 + a \cdot u_3, \quad f(u_4) = 2 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 - 3 \cdot u_3.$$

Exercici 3. Sigui $f : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbf{M}(2, 2, \mathbb{R})$ l'aplicació definida per

$$f(a + bx + cx^2) := \begin{pmatrix} b + c & a \\ b & c \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Proveu que f és lineal i doneu la seva matriu en les bases $(1, x, x^2)$, de $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, i $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$, de $\mathbf{M}(2, 2, \mathbb{R})$.

Exercici 4. Sigui

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{M}(2, 2, \mathbb{R}) : a + b + c + d = 0 \right\}.$$

- (a) Proveu que E és un subespai vectorial de $\mathbf{M}(2, 2, \mathbb{R})$ i determineu-ne una base.
- (b) Proveu que l'aplicació $f : E \longrightarrow E$ definida per

$$f \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) := \begin{pmatrix} a + c & c + b \\ b + d & d + a \end{pmatrix}$$

està ben definida i és lineal. Doneu la matriu de f en la base de E que heu determinat en (a).

Exercici 5. Sigui $f : \mathbb{R}[x]_{\leq 1} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ l'aplicació lineal definida per

$$f(1) := 1 - x + 3x^2, \quad f(x) := 2 - x + 3x^2.$$

Considerem els conjunts ordenats $(1 + 2x, 3 + 2x)$ de $\mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ i $(1 + 3x^2, 2 + x + x^2, 2 + 5x^2)$ de $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Proveu que són bases d'aquests espais i determineu la matriu de f en aquestes bases.

Exercici 6. Siguin $a, b \in \mathbb{R}$, $q(x) := (1 - a) + a \cdot x + (1 - a) \cdot x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ i f un endomorfisme de $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ definit per

$$f(c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2) := (c_0 + c_1 + 2 \cdot c_2) + (2 \cdot c_0 + 2 \cdot c_2) \cdot x + (b \cdot c_0 + c_1 + 3 \cdot c_2) \cdot x^2,$$

per a $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

- Doneu la matriu de f en la base $(1, x, x^2)$.
- Determineu tots els valors possibles de la parella a, b per als quals se satisfan simultàniament les dues propietats $\text{im } f \neq \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ i $q(x) \in \text{im } f$.
- Determineu, com a funció dels valors dels paràmetres a i b , una base d'un subespai vectorial $H \neq \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ tal que $f(H) = \text{im } f$.
- Doneu les dimensions, bases i equacions dels subespais vectorials $\ker f$ i $\text{im } f$.
- Doneu la matriu de f en la base $(1 + x, 1 + x^2, x + x^2)$ de $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

Exercici 7. Siguin E un espai vectorial, i $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base de E .

- Demostreu que existeix un únic endomorfisme f de E tal que:

$$f(v_1) = v_1 + v_2, \quad f(v_3) = v_1, \quad \ker f = \langle v_1 + v_2 \rangle.$$

- Doneu la matriu de f en la base (v_1, v_2, v_3) .
- Calculeu $f(4 \cdot v_1 - v_2 + 3 \cdot v_3)$.
- Doneu una base del nucli de f i una base de la imatge de f ; una base del nucli de f^2 i una de la imatge de f^2 ; i una base del nucli de f^3 i una de la imatge de f^3 .

Exercici 8. Sigui E el subespai vectorial de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ generat per les funcions $1, x, x^2, \sin x, \cos x$. Considerem l'aplicació $T : E \longrightarrow E$ definida per $T(f) := f + D(f) + D^2(f)$, on D^i denota la derivada i -èsima, per a tot element $f \in E$. (Noteu que T és un operador diferencial.)

- Proveu que $(1, x, x^2, \sin x, \cos x)$ és una base de E .
- Proveu que T està ben definida i és lineal.
- Determineu la matriu de T en la base de (a). Doneu una base de $\ker T$ i una base de $\text{im } T$.
- Decidiu si existeix $g \in E$ tal que $T(g) = 2 \sin x - 3 \cos x + 6$. (Noteu que això és decidir si aquesta equació diferencial té solució en E .)

Exercici 9. Determineu quines de les aplicacions següents són lineals i, per a aquelles que ho siguin, escriviu-ne les matrius en les bases $(1, x, \dots, x^m)$ de $\mathbb{R}[x]_{\leq m}$; doneu-ne, també, els nuclis i les imatges corresponents.

- (a) $f : \mathbb{R}[x]_{\leq n} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(p(x)) = p(2)$.
- (b) $f : \mathbb{R}[x]_{\leq n} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq n}$, tal que $f(p(x)) = p(x+1)$.
- (c) $f : \mathbb{R}[x]_{\leq n} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq n-1}$, tal que $f(p(x)) = p'(x)$.
- (d) $f : \mathbb{R}[x]_{\leq n} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq n}$, tal que $f(p(x)) = (x+1) \cdot p'(x)$.

Exercici 10. Considerem l'aplicació $f : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ definida per $f(p(x)) := p'(x) - p(-1)$, on $p'(x)$ designa el polinomi derivat de $p(x)$.

- (a) Comproveu que f és lineal
- (b) Trobeu una base de l'espai quocient $\mathbb{R}[x]_{\leq 3} / \ker f$.
- (c) Expressau la classe del polinomi $3x^2 + 2x - 2$ en la base que hagueu trobat.

Exercici 11. Siguin $a_1, \dots, a_n$ nombres reals diferents i $f : \mathbb{R}[x]_{\leq m} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ l'aplicació definida per $f(p(x)) := (p(a_1), \dots, p(a_n))$, per a tot $p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq m}$.

- (a) Comproveu que f és lineal.
- (b) Doneu la matriu associada a f en les bases usuals de $\mathbb{R}[x]_{\leq m}$ i $\mathbb{R}^n$.
- (c) Determineu, en funció de m i n , les dimensions del nucli de f i de la imatge de f .

Exercici 12. Sigui $E = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ l'espai vectorial dels polinomis de coeficients reals, en la indeterminada x , i de grau menor o igual que tres. Considerem l'aplicació f de E en E definida per

$$f(a + b \cdot x + c \cdot x^2 + d \cdot x^3) = (a + b + c + d) + (b + c) \cdot x - (b + c) \cdot x^2 + (a - b - c + d) \cdot x^3,$$

per a $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

- (a) Comproveu que f és un endomorfisme de E .
- (b) Determineu bases i equacions dels subespais vectorials $\ker f$, $\operatorname{im} f$, i $\ker f \cap \operatorname{im} f$.
- (c) Considerem $G := \{a + b \cdot x + c \cdot x^2 + d \cdot x^3 \in E : a, b, c, d \in \mathbb{R}, b + c = 0\}$ i

$$\begin{aligned} g : \quad & E / \langle 1 - x^3 \rangle && \longrightarrow G \\ & [a + b \cdot x + c \cdot x^2 + d \cdot x^3] && \mapsto f(a + b \cdot x + c \cdot x^2 + d \cdot x^3) \end{aligned} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

on per a tot polinomi $p(x) \in E$, $[p(x)]$ indica la classe en $E / \langle 1 - x^3 \rangle$ que admet $p(x)$ com a representant.

Contesteu les qüestions següents justificant-ne la resposta.

- (1) És g una aplicació ben definida?
- (2) És g una aplicació lineal?
- (3) És g una aplicació injectiva?

- (4) És g una aplicació exhaustiva?
- (d) Si és possible, doneu una base de $E/\langle 1 - x^3 \rangle$ i una de G tals que la matriu associada a g en aquestes bases sigui

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si no és possible, demostreu-ho.

Exercici 13. (a) Sigui $f : E \rightarrow F$ una aplicació lineal i G un subespai de E . Sigui $\pi : E \rightarrow E/G$ la projecció de E en el quocient E/G . Demostreu que existeix una aplicació lineal $\varphi : E/G \rightarrow F$ tal que $f = \varphi \circ \pi$ si, i només si, $G \subset \ker f$.

- (b) Considerem els espais vectorials $E := \mathbb{R}^4$ i $F := \mathbb{R}^2$, el subespai vectorial de E definit com $G := \langle (1, -1, 0, 0) \rangle$, i l'aplicació lineal $f : E \rightarrow F$ definida per $f(x, y, z, t) := (x + y, z + t)$. Trobeu una base de E/G i calculeu la matriu de $\varphi : \mathbb{R}^4/G \rightarrow \mathbb{R}^2$ en aquesta base i la base usual de $\mathbb{R}^2$.

Exercici 14. (Segon teorema d'isomorfia) Sigui E un espai vectorial, i $F, G \subset E$ subespais de E . Proveu que la composició de la inclusió $i : F \rightarrow F + G$ amb la projecció en el quocient $\pi : F + G \rightarrow (F + G)/G$ induïx un isomorfisme $F/(F \cap G) \rightarrow (F + G)/G$.

Exercici 15. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal que, en la base usual, té com a matriu associada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Doneu bases i equacions de $\ker f$ i $\operatorname{im} f$.
- (b) Comproveu que $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus \operatorname{im} f$. És cert que l'aplicació

$$\varphi : \mathbb{R}^3 / \ker f \rightarrow \operatorname{im} f$$

tal que $\varphi([u]) = u_2$ si $u = u_1 + u_2$ amb $u_1 \in \ker f$ i $u_2 \in \operatorname{im} f$, està ben definida i és un isomorfisme?

- (c) Considerem l'aplicació

$$\psi : \mathbb{R}^3 / \ker f \rightarrow \operatorname{im} f, \quad \psi([u]) := f(u).$$

El teorema d'isomorfisme ens diu que ψ és també un isomorfisme. Comproveu que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 / \ker f & \xrightarrow{\varphi} & \operatorname{im} f \\ & \searrow \psi & \downarrow f' \\ & & \operatorname{im} f, \end{array}$$

on f' es la restricció de f , és commutatiu.

- (d) Trieu una base en $\operatorname{im} f$ i doneu la matriu de f' en aquesta base. Amplieu la base de $\operatorname{im} f$ a $\mathbb{R}^3$ i determineu la matriu de f en aquesta base.

Exercici 16. Sigui f un endomorfisme d'un espai vectorial E de dimensió finita. Proveu que les propietats següents són equivalents.

(a) $\operatorname{im} f = \ker f$.

(b) $f^2 = 0$, $\dim E$ és parell i $\operatorname{rg}(f) = \frac{\dim E}{2}$.

Exercici 17. Sigui f un endomorfisme d'un espai vectorial E de dimensió finita.

(a) Proveu que $\operatorname{im} f^2 \subset \operatorname{im} f$ i que $\ker f \subset \ker f^2$.

(b) Proveu que $E = \operatorname{im} f \oplus \ker f$ si, i només si, $E = \operatorname{im} f + \ker f$; si, i només si, $\operatorname{im} f = \operatorname{im} f^2$.

(c) Doneu un exemple d'un endomorfisme f de $\mathbb{R}^2$ per al qual se satisfacin les condicions de l'apartat (b) i que no se satisfaci la igualtat $f^2 = f$.