

3. Dualitat

Exercici 1. Sigui (u_1, u_2, u_3, u_4) una base d'un espai vectorial E , i considerem la seva base dual, $(u_1^*, u_2^*, u_3^*, u_4^*)$. Determina la base (v_1, v_2, v_3, v_4) de E , si existeix, de la qual la base $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ donada per les formes lineals següents n'és la dual:

$$\omega_1 := u_1^* - u_2^*, \quad \omega_2 := u_1^* - u_3^*, \quad \omega_3 := u_2^* + u_3^*, \quad \omega_4 := u_2^* + u_4^*.$$

Si no existeix, justifica-ho.

Exercici 2. Sigui E un espai vectorial de dimensió finita $n \geq 1$, i $\omega_1, \omega_2 \in E^*$. Prova que l'enunciat " $\ker \omega_1 \neq \ker \omega_2 \iff \omega_1, \omega_2$ són linealment independents" és fals.

Exercici 3. Sigui (w_1, w_2, w_3) la base dual de la base $((-1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 0))$ de $\mathbb{R}^3$.

- Troba les matrius de les formes w_j en les bases usals de $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}$.
- Determina les coordenades de la forma ρ definida per $\rho(x, y, z) := x + 2 \cdot z$ en la base (w_1, w_2, w_3) .

Exercici 4. Sigui $a \in \mathbb{R}$ i $f_a : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un endomorfisme de matriu associada $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ en la base canònica. Determina a , si existeix, amb la condició que la imatge de la forma de matriu $\omega = (1, -1)$ per l'aplicació dual, $f_a^* : \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, verifica $f_a^*(\omega) = (-1, 0)$. Si no existeix, demostra-ho (tot és expressat en la base canònica de $\mathbb{R}^2$ i la seva dual en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$).

Exercici 5. Considerem els subespais següents de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} F &:= \langle (1, 1, 1, 2), (-1, 2, -3, 1), (2, -3, -3, 2), (2, 0, -5, 5) \rangle, \\ G &:= \langle (1, 2, 4, 3), (6, -2, -1, 4), (4, -6, -9, -2) \rangle. \end{aligned}$$

Calcula $F^\circ, G^\circ, F^\circ \cap G^\circ, F^\circ + G^\circ, (F + G)^\circ$ i $(F \cap G)^\circ$. Comprova que

$$F^\circ \cap G^\circ = (F + G)^\circ, \quad \text{i que} \quad F^\circ + G^\circ = (F \cap G)^\circ.$$

Exercici 6. (a) Troba unes equacions i una base del subespai $F \subset \mathbb{R}^4$ tal que $F^\circ = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle$, on $\omega_1(x, y, z, t) := x - y + 2 \cdot t$, $\omega_2(x, y, z, t) := y - z + t$.

(b) Sigui $G := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - z + 3 \cdot t = 0; y - z = 0\}$; troba equacions de $(F \cap G)^\circ$.

Exercici 7. Sigui $E := \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$.

(a) Demostra que les aplicacions $\omega_i : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, definides per

$$\omega_1(p(x)) := \int_{-1}^1 p(x) dx, \quad \omega_2(p(x)) := p'(-1) + p''(-1) + p'''(-1), \quad \omega_3(p(x)) := p(0)$$

són formes lineals linealment independents.

(b) Troba equacions per al subespai ${}^\circ \langle \omega_1, \omega_2, \omega_3 \rangle$.

(c) Troba equacions per al subespai $\langle \omega_1, \omega_2, \omega_3 \rangle$.

(d) Sigui

$$F := \left\{ p_0 + p_1 \cdot x + p_2 \cdot x^2 + p_3 \cdot x^3 + p_4 \cdot x^4 \in E : \begin{cases} p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{R}, \\ p_0 - p_3 + p_4 = 0, \\ p_0 - 2 \cdot p_3 + 2 \cdot p_4 = 0, \\ p_3 + p_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Determina $F^\circ \cap \langle \omega_1, \omega_2, \omega_3 \rangle$ i $F^\circ + \langle \omega_1, \omega_2, \omega_3 \rangle$.

Exercici 8. Siguin $a_0, \dots, a_n$ nombres reals diferents dos a dos.

(a) Prova que les aplicacions

$$\omega_{a_i} : \mathbb{R}[x]_{\leq n} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \omega_{a_i}(p(x)) := p(a_i), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

formen una base de l'espai dual de $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$.

(b) Prova que els polinomis definits per

$$p_j(x) := \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{x - a_i}{a_j - a_i}, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

són tals que $(\omega_{a_0}, \dots, \omega_{a_n})$ és la base dual de $(p_0(x), \dots, p_n(x))$.

(c) Considerem la forma lineal ρ de $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ definida per

$$\rho : \mathbb{R}[x]_{\leq n} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \rho(p(x)) := \int_0^1 p(x) dx.$$

Prova que existeixen $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ tals que

$$\forall p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq n} \quad \int_0^1 p(x) dx = \sum_{i=0}^n b_i \cdot p(a_i).$$

(d) Determina b_0, b_1, b_2 en el cas $n = 2$ i $a_0 = 0, a_1 = 1/2$ i $a_2 = 1$.

Exercici 9. Siguin $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in (\mathbb{R}[x]_{\leq 2})^*$ definides per

$$\omega_1(p(x)) = \int_0^1 p(x) dx, \quad \omega_2(p(x)) = \int_0^2 p(x) dx, \quad \omega_3(p(x)) = \int_{-1}^0 p(x) dx.$$

(a) Prova que $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ és una base de $(\mathbb{R}[x]_{\leq 2})^*$.

(b) Calcula les coordenades de $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ en la base dual de $\{1, x, x^2\}$.

Exercici 10. Siguin $E := M(2, 2, \mathbb{R})$ l'espai vectorial de les matrius 2 per 2 amb coeficients reals, $f : E \rightarrow E$ i $\text{tr} : E \rightarrow \mathbb{R}$ les aplicacions lineals definides com a

$$f(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A - A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ i } \text{tr} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d. \text{ Considerem els subespais}$$

$$F = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$G = \left\{ A \in E \mid A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \right\}.$$

- (a) Dóna equacions de $F + G$.
- (b) Calcula una base de E/G .
- (c) És cert que E/G és isomorf a F ? En el cas que sigui cert, estableix un isomorfisme.
- (d) Calcula $\dim(F^\circ \cap G^\circ)$.
- (e) Calcula $\dim(\operatorname{Im} f)$. És cert que $E = \operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f)$?
- (f) Sigui f^* l'aplicació dual de f . Calcula $f^*(\operatorname{tr})$.