

4. Diagonalització. Formes bilineals

Exercici 1. Per a cadascuna de les matrius següents, M_x , calcula els vectors propis i els valors propis; determina també, si és possible, una matriu diagonal D_x que sigui de la forma $D_x = P_x^{-1} \cdot M_x \cdot P_x$, i dona una tal matriu P_x . Per als casos $x = d$ i $x = e$, dona totes les matrius P_x per a les tries D_x que has fet.

$$M_a := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad M_b := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad M_c := \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M_d := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad M_e := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad M_f := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M_g := \begin{pmatrix} 10 & -16 & -12 \\ 6 & -10 & -9 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad M_h := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad M_i := \begin{pmatrix} -7 & 0 & 7 \\ 1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercici 2. Estudia, en funció dels paràmetres, la diagonalitzabilitat dels endomorfismes f_x , $x = a, b, c$, que, en una certa base de $\mathbb{R}^3$ tenen associades les matrius

$$M_a = \begin{pmatrix} -a & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad M_b = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}, \quad M_c = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}.$$

En cada cas, troba, si existeix, una base en la qual l'endomorfisme diagonalitzi.

Exercici 3. Calcula per a quins valors del paràmetre $a \in \mathbb{R}$ l'endomorfisme

$$f_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z, t) & \mapsto & (x + z, y + a \cdot t, z + a \cdot t, a \cdot z + t) \end{array}$$

és diagonalitzable. Per a cadascun d'aquells valors per als quals ho sigui, calcula una forma diagonal i una base en la qual l'endomorfisme prengui la forma diagonal que hagueu donat. És aquesta forma diagonal única?

Exercici 4. Estudia, en funció del paràmetre k , la diagonalitzabilitat de l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ donat per

$$f_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (2 \cdot x - y + z, -x + k \cdot y + z, x + y + 2 \cdot z). \end{array}$$

Exercici 5. Calcula, per a tot nombre natural $n \geq 0$, les potències A^n i B^n de les matrius

$$A := \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ \frac{-3}{10} & 0 & b \end{pmatrix}$$

en els casos on aquestes matrius siguin diagonalitzables.

Exercici 6. Sigui $A := \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & \cdots & a_n \end{pmatrix} \neq 0$. Prova que A és diagonalitzable si, i només

si, $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$.

Exercici 7. Estudia, en funció de $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $n \geq 2$ la diagonalitzabilitat de la matriu $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbf{M}(n, n, \mathbb{R})$ definida per

$$a_{i,j} := \begin{cases} b, & \text{si } 1 \leq i < j = n; \\ c, & \text{si } 1 \leq j < i = n; \\ a, & \text{si } i = j = n; \\ 0, & \text{altrement.} \end{cases}$$

Exercici 8. Siguin $\{a_n\}_{n \geq 0}$ i $\{b_n\}_{n \geq 0}$ successions de nombres reals tals que, per a tot $n \geq 0$ és

$$a_{n+1} = 4 \cdot a_n - b_n, \quad b_{n+1} = 6 \cdot a_n - b_n.$$

- Troba els termes generals a_n i b_n en funció dels valors inicials a_0 i b_0 .
- Demostra que existeixen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, tals que la successió $\{\nu_n\}_{n \geq 0}$ donada per $\nu_n := \lambda \cdot a_n + \mu \cdot b_n$ és una successió constant.

Exercici 9. Troba, o bé demostra que no existeixen, dues funcions $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, amb derivades contínues, amb valors $f(0)$ i $g(0)$ donats, i tals que, per a tot $t \in \mathbb{R}$, és

$$f'(t) = f(t) + 4 \cdot g(t), \quad g'(t) = 2 \cdot f(t) - g(t).$$

Exercici 10. Demostra que la forma bilineal en $\mathbb{R}^3$:

$$f((x, y, z), (x', y', z')) = 2xx' + 5yy' + 5zz' + 2xy' + 2x'y - 2xz' - 2x'z - 4yz' - 4y'z$$

defineix producte escalar en aquest espai vectorial.

- Troba una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ respecte de f .
- Calcula la norma de $(1, 1, 1)$ respecte de f .
- Calcula el subespai $\langle (1, 0, 0), (1, 1, 0) \rangle^\perp$ respecte de f .

Exercici 11. Sigui $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicació donada per $\varphi((x, y, z), (x', y', z')) = xx' + xy' + x'y + 2yy' + yz' + y'z + 3zz'$.

- Prova que φ defineix un producte escalar en $\mathbb{R}^3$ i calcula el subespai ortogonal $F^\perp$ del subespai $F = \{(x, y, z) | 5x + 8y + 5z = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$.
- Troba una base ortonormal respecte d'aquest producte escalar formada per vectors de F i de $F^\perp$.

Exercici 12. Sigui E un espai vectorial de dimensió 3 sobre $\mathbb{R}$, i sigui $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilinear amb matriu

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

en una base (u_1, u_2, u_3) .

1. Prova que φ és un producte escalar i calcula una base ortonormal de E respecte de φ .
2. Calcula $F^\perp$ i $G^\perp$, subespais ortogonals de $F = \langle u_1 + u_2 + u_3 \rangle$ i de $G = \langle u_1, u_2 \rangle$ respectivament.

Exercici 13. Sigui E un espai vectorial de dimensió 3 sobre $\mathbb{R}$ i sigui $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilinear tal que la seva matriu en una base (u_1, u_2, u_3) és

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -4 & 8 & -4 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Prova que φ és un producte escalar i doneu una base ortonormal de E .
2. Calcula les coordenades de $w = u_1 + u_2 + u_3$ en la base ortonormal trobada en (a).

Exercici 14. Suposem donada una forma bilinear simètrica $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfà les condicions

$$\begin{array}{lll} f(u_1, u_1) = 1 & f(u, u_1) = 1 & f(u_2, u_2) = 2 \\ f(u, u_2) = 1 & f(u_3, u_3) = 5 & f(v, v) = 9, \end{array}$$

on (u_1, u_2, u_3) és una certa base de $\mathbb{R}^3$ i u, v són els vectors $u = 2u_1 - u_3$ and $v = u_2 - u_3$.

1. Prova que f està únicament determinada per aquestes dades i calcula la seva matriu respecte de la base (u_1, u_2, u_3) .
2. Calcula $\langle u_1 \rangle^\perp$

Exercici 15. Sigui $\mathbb{R}_2[x]$ l'espai vectorial dels polinomis amb coeficients reals de grau menor o igual a 2. Definim

$$\varphi(p, q) = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

Prova que φ és un producte escalar. Calcula una base ortonormal $\mathbb{R}_2[x]$ i calcula també el subespai ortogonal del subespai generat pel polinomi $2x + 1$.

Exercici 16. Sigui $f : \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}$ l'aplicació definida per

$$f(P, Q) := P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1) \quad (P, Q \in \mathbb{R}_n[x]).$$

1. Prova que f és un producte escalar si i només si $n \leq 2$.
2. Dona una base ortonormal de $\mathbb{R}_2[x]$.

Exercici 17. Sigui $\varphi_a : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ donada per

$$\varphi_a((x, y, z), (x', y', z')) = axx' + ayy' + (a - 1)zz' + xy' + yx'.$$

Troba tots els valors de a tals que φ_a defineix un producte escalar a $\mathbb{R}^3$.

Exercici 18. Sigui E l'espai vectorial de les matrius $n \times n$ amb coeficients reals. Definim

$$\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{com a} \quad \varphi(A, B) = \text{tr}(AB^t) \quad \forall A, B \in E,$$

(on tr denota la traça de la matriu, és a dir, la suma dels elements de la diagonal).

1. Prova que φ és un producte escalar i calcula la seva matriu de Gram en la base canònica d' E (o sigui, la base definida per les matrius tals que tots els seus coeficients són zero llevat d'un que és 1).
2. Prova que el conjunt F de les matrius $n \times n$ amb traça zero és un subespai de E , i trobeu $F^\perp$.
3. Dona una base ortonormal de F per $n = 3$.

Exercici 19. Siguin (E, φ) espai vectorial euclidià, F un espai vectorial real de dimensió finita i $f : F \rightarrow E$ una aplicació lineal. Definim, per a qualssevol $u, v \in F$,

$$\varphi_f(u, v) := \varphi(f(u), f(v)).$$

Prova que φ_f és un producte escalar a F si i només si f és injectiva.

Exercici 20. Siguin $(u_1, \dots, u_n)$ una base ortonormal d'un espai vectorial euclidià E i $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbf{M}(n, n, \mathbb{R})$. Prova que els vectors columna d' A : $a_i := \sum_j a_{ij}u_j$, $i = 1, \dots, n$, formen una base ortonormal d' E si i només si els vectors fila d' A , $a^j := \sum_i a_{ij}u_i$, també formen una base ortonormal d' E .

Exercici 21. Siguin u, v dos vectors en un espai vectorial euclidià tals que $\|u\| = \|v\|$. Prova que $u + v$ i $u - v$ són vectors ortogonals.

Exercici 22. Sigui $(E, \cdot)$ un espai vectorial euclidià.

1. Prova que $|u \cdot v| = \|u\| \|v\|$ si i només si els vectors u i v són linealment dependents.
2. Considerem ara $v \neq \vec{0}$. Prova que $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$ si i només si $u = \lambda v$ amb $\lambda \geq 0$.

Exercici 23. Sigui $(E, \cdot)$ un espai vectorial euclidià i considerem $u, v \in E$. Prova que:

1. $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2u \cdot v$.
2. $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2u \cdot v$.

Exercici 24. Sigui E un espai vectorial euclidià i $u, v \in E$. Prova o troba un contraexemple de cadascuna de les afirmacions següents:

1. Si u és ortogonal a v , aleshores $\|u + xv\| \geq \|u\|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
2. Si $\|u + xv\| \geq \|u\|$, $\forall x \in \mathbb{R}$ aleshores u és ortogonal a v .

Exercici 25. Siguin $F, G \subset E$ subespais d'un espai vectorial euclidià . Prova les igualtats següents:

1. $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp.$

2. $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$

Exercici 26. Siguin E un espai vectorial euclidià , $(u_1, \dots, u_n)$ una base d' E , F el subespai d' E donat per la equació $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$. Recorda que si la base $(u_1, \dots, u_n)$ és ortonormal, aleshores $(a_1, \dots, a_n)$ és un vector normal al subespai F . Prova que en el cas general, anomenant G a la matriu de Gram de $(u_1, \dots, u_n)$, el producte de la matriu $\text{adj}(G)$ dels adjunts de G amb la matriu columna dels a_i és un vector normal a F .