

5. Polinomi mínim. Components primaris

Exercici 1. Prova que tota matriu de la forma $A := \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, amb $a, b \in \mathbb{R}$, és equivalent sobre $\mathbb{C}$ a una matriu del tipus $\begin{pmatrix} r \cdot e^{i\theta} & 0 \\ 0 & r \cdot e^{-i\theta} \end{pmatrix}$, amb $r, \theta \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$. Per a cada matriu A , troba matrius B i P tals que $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$ (Recorda que $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$).

Exercici 2. Sigui A una matriu de polinomi característic $p(x) := (x^2 + 1)(x - 2)(x - 3)$. Estudia si A diagonalitza sobre $\mathbb{R}$ o sobre $\mathbb{C}$. En cas afirmatiu, dona una forma diagonal de A .

Exercici 3. Sigui A una matriu de polinomi característic $-(x - 1)^2(x + 2)^3$ i tal que

$$\dim \ker(A - I) = m, \quad \dim \ker(A + 2I) = 3.$$

Determina els valors de m per als quals la matriu A és diagonalitzable i escriu una forma diagonal de A per a aquests valors. Si $A \in M(5, 5, \mathbb{R})$, Per a quins valors de m se satisfà que $\mathbb{R}^5 = \ker(A - I) \oplus \ker(A + 2I)$?

Exercici 4. Siguin E un K -espai vectorial, $h \in \text{End}(E)$ un endomorfisme de E , i $F, G \subseteq E$ subespais invariants per h . Demostra que $h(F)$, $h^{-1}(F)$, $F + G$ i $F \cap G$ són subespais invariants per h .

Exercici 5. Siguin E un espai vectorial de dimensió finita i f un endomorfisme de E tal que $f^2 = f$.

(a) Prova que $E = \ker f \oplus \ker(f - Id)$.

(b) Prova que f és diagonalitzable i determineu-ne les possibles formes diagonals.

(c) Estudia l'endomorfisme de $\mathbb{R}^2$ que en la base usual té matriu associada $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercici 6. Siguin E un espai vectorial de dimensió finita i f un endomorfisme de E tal que $f^2 = Id_E$.

1. Prova que $E = \ker(f + Id) \oplus \ker(f - Id)$.

2. Prova que f és diagonalitzable i determina les seves possibles formes diagonals.

3. Estudia l'endomorfisme de $\mathbb{R}^2$ que en la base usual té matriu associada $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercici 7. Siguin E un espai vectorial de dimensió finita i $f \in \text{End}(E)$ un endomorfisme de E tal que $f^k = 0$ però $f^{k-1} \neq 0$, per a algun nombre enter $k > 0$. Demostra que l'únic valor propi de f és 0 i que, si $k := \dim E$, llavors existeix un vector v tal que $\{v, f(v), f^2(v), \dots, f^{k-1}(v)\}$ és una base de E . Escriu la matriu de f en aquesta base.

Exercici 8. Demostra que una matriu quadrada, A , i la seva transposada, A^t , tenen els mateixos valors propis, i amb les mateixes multiplicitats, el mateix polinomi característic i el mateix polinomi mínim. Tenen els mateixos vectors propis? Comprova la vostra

afirmació amb la matriu $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercici 9. Siguin E un $\mathbb{R}$ -espai vectorial de dimensió 3 i f un endomorfisme de E per al qual se satisfà que $f^7 + f^5 = 0$.

- (a) Demuestra que f té un valor propi real.
- (b) Prova que $\det(f) = 0$.
- (c) Dona un exemple d'un $\mathbb{C}$ -espai vectorial de dimensió 3 i un endomorfisme g de determinant no nul i tal que $g^7 + g^5 = 0$.

Exercici 10. Siguin E un K -espai vectorial de dimensió 2 i f un endomorfisme que no és una homotècia ($f \neq \lambda I$ per cap valor de $\lambda \in K$) i tal que $f^2 + af + bI = 0$, per a alguns elements $a, b \in K$.

- (a) Prova que $\text{tr}(f) = -a$ i $\det(f) = b$.
- (b) Prova que f^2 és una homotècia si, i només si, $\text{tr}(f) = 0$.

Exercici 11. Sigui A una matriu quadrada de coeficients reals i tal que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$. És A diagonalitzable sobre $\mathbb{R}$?

Exercici 12. Sigui A una matriu quadrada de coeficients complexos i tal que $A^5 = I$. Prova que A és diagonalitzable sobre $\mathbb{C}$.

Exercici 13. Sigui A una matriu quadrada de coeficients racionals per a la qual se satisfà que $(A^2 - 4I)(A^2 - I) = 0$. Prova que A és diagonalitzable sobre $\mathbb{Q}$.

Exercici 14. Siguin E un $\mathbb{R}$ -espai vectorial de dimensió 4 i $f \in \text{End}(E)$ un endomorfisme d' E que en una base fixada té matriu associada

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determina:

- (a) el polinomi característic de f ;
- (b) el polinomi mínim de f ;
- (c) el polinomi mínim de f en els vectors de la base;
- (d) la descomposició de E en components primaris;
- (e) els valors propis i els vectors propis;
- (f) un vector que tingui per polinomi mínim el polinomi mínim de f . És f diagonalitzable?
- (g) Per a cada divisor mònic $p(x)$ del polinomi mínim de f , troba, si existeix, un vector $u \in E$ de polinomi mínim $m_{f,u}(x) = p(x)$.