

6. Formes de Jordan

Exercici 1. Troba el polinomi mínim, la matriu de Jordan i una base de Jordan per a cadascuna de las matrius següents (sobre el cos dels nombres complexos):

$$\begin{aligned}
 A_1 &:= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}, & A_2 &:= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\sqrt{2}i \\ -1 & 1 & \sqrt{2}i \\ -\sqrt{2}i & \sqrt{2}i & -2 \end{pmatrix}, & A_3 &:= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \\
 A_4 &:= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & A_5 &:= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & A_6 &:= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\
 A_7 &:= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}, & A_8 &:= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, & A_9 &:= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Exercici 2. Troba el polinomi mínim, la matriu de Jordan i una base de Jordan per a cadascuna de les matrius següents, segons els valors dels paràmetres:

$$\begin{aligned}
 B_1 &:= \begin{pmatrix} a & 1-b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix}, & B_2 &:= \begin{pmatrix} a-1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3-a & 1 & 3 \end{pmatrix}, & B_3 &:= \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ 1 & 2 & -m \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \\
 B_4 &:= \begin{pmatrix} 1 & a & b & a \\ 0 & 2 & c & 1 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & B_5 &:= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & b & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, & B_6 &:= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 2 & -3 & 1 & c \end{pmatrix}, \\
 B_7 &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ a & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, & B_8 &:= \begin{pmatrix} 1 & a & b & a \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & B_9 &:= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Exercici 3. Calcula les formes de Jordan de les matrius de la llista 5: *Polinomi mínim. Components primaris.*

Exercici 4. (a) Calcula les potències A^n de la matriu $A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, per a tot $n \in \mathbb{N}$.

(b) Calcula les potències d'unes quantes matrius d'exercicis anteriors.

Exercici 5. Sigui A una matriu de polinomi característic $q(t) := -(t-2)^5$, i $n_i := \dim \ker(A - 2I)^i$, $i \geq 0$. Troba, si és possible, la forma de Jordan i el polinomi mínim de A en el cas en què $(n_1, n_2, n_3) = (2, 4, 5)$; si no és possible, justifiqueu-ho.

Exercici 6. Sigui A una matriu de polinomi característic $q(t) := -(t-2)^5$, i $n_i := \dim \ker(A - 2I)^i$, $i \geq 0$. Trobeu, si és possible, la forma de Jordan i el polinomi mínim de A en el cas en què $(n_1, n_2, n_3, n_4) = (?, 3, ?, 5)$; si no és possible, justifiqueu-ho.

Exercici 7. Una matriu A és de polinomi característic $q(t) := -(t-2)^5(t+3)^4$ i polinomi mínim $m(t) := (t-2)^4(t+3)^3$. Troba, si és possible, la forma de Jordan de A ; si no és possible, justifica-ho.

Exercici 8. Troba, si és possible, la forma de Jordan i el polinomi mínim d'una matriu A de la qual sabem que el seu polinomi característic és $q(t) := -(t-2)^5(t+3)^4$ i que, si per a tot $i \geq 0$ anomenem $n_{1,i} := \dim \ker(A - 2I)^i$ i $n_{2,i} := \dim \ker(A + 3I)^i$, llavors és

$$(n_{1,1}, n_{1,2}, n_{1,3}) = (3, 4, ?), \quad (n_{2,1}, n_{2,2}) = (2, 4).$$

Si no és possible, justifica per què.

Exercici 9. Sigui $A \in \mathbf{M}(15, 15, \mathbb{R})$ una matriu per a la qual se satisfan les condicions següents:

- (a) El polinomi característic de A és $-x^5(x-1)^5(x+1)^5$.
- (b) El rang de A és 13 i $\dim \ker A^2 = 4$.
- (c) El rang de $A - I$ és 12 i el polinomi mínim de A és $(x-1)^2p(x)$, amb $p(1) \neq 0$.
- (d) El rang de $(A + I)^i$ és 10 si, i només si, $i \geq 5$.

Troba, si és possible, el polinomi mínim i la forma de Jordan de A . Si no és possible, justifica-ho.

Exercici 10. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfisme amb només 1 i 2 com a valors propis i tal que el polinomi mínim i el polinomi característic són iguals (llevat del signe) i $\text{tr } f = 4$. Troba, si és possible, el polinomi mínim de f . Si no és possible, justifica-ho.

Exercici 11. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfisme amb només 1 i 2 com a valors propis i tal que el polinomi mínim i el polinomi característic són diferents (i no només pel signe) i $\det f = 4$. Troba, si és possible, el polinomi mínim i el polinomi característic de f . Si no és possible, justifica-ho.

Exercici 12. Sigui A una matriu quadrada de polinomi caraterístic $p(x) := -x^7$. Troba, si és possible, la forma de Jordan de A i el seu polinomi mínim si

$$\text{rg } A = 4, \quad \text{rg } A^2 = 2, \quad \text{rg } A^3 = 1.$$

Si no és possible, justifica-ho.

Exercici 13. Sigui $p_f(t) = -(t-2)^4(t-3)^3$ el polinomi característic d'un endomorfisme f d'un cert espai vectorial E . Troba la dimensió de E i totes les formes reduïdes compatibles amb els polinomis mínims següents:

$$m_f(t) = (t-2)^2(t-3)^2, \quad m_f(t) = (t-2)^3(t-3)^3, \quad m_f(t) = (t-2)^4(t-3).$$

Exercici 14. Sigui f un endomorfisme d'un espai vectorial real de dimensió n . Suposem que existeix $a \in \mathbb{R}$ tal que $f^2 = a \cdot f$. Determina el nombre de les possibles formes de Jordan de f en funció de a i de n (per al cas $a = 0$, cal discutir els casos segons la paritat de n).

Exercici 15. Sigui f un endomorfisme d'un espai vectorial real de dimensió 3 i tal que $f^3 = f^2$. Dona, si és possible, la forma de Jordan en el cas en què $\ker(f) \cap \operatorname{im}(f) \neq \{0\}$ i $\operatorname{rg} f = 2$. Si no és possible, justifica-ho.

Exercici 16. Sigui E un $\mathbb{C}$ -espai vectorial de dimensió 5. Determina les possibles formes de Jordan dels endomorfismes f de E tals que

$$f(f + id)^3 = 0, \quad \operatorname{rg} f \geq 4, \quad \dim \ker(f + id)^2 < \dim \ker(f + id)^3.$$