

2. Afinitats

En aquesta llista d'exercicis, $\mathbb{A}^n$ denota un espai afí de dimensió n amb espai vectorial associat E sobre un cos K de característica zero. Escriurem $\mathbb{A}_K^n$ quan convingui especificar el cos K .

2.1 Sigui f una afinitat de $\mathbb{A}^n$. Demostreu que f és una homotècia o una translació si, i només si, transforma tota recta de $\mathbb{A}^n$ en una recta paral·lela a ella.

2.2 Sigui G el conjunt de les translacions i les homotècies de $\mathbb{A}^n$.

(a) Demostreu que G és un grup amb la composició.

(b) Sigui T el subconjunt de G format per les translacions. Demostreu que T és un subgrup normal de G . A quin grup és isomorf el quocient G/T ?

2.3 Siguin p_1, p_2, p_3 i p_4 punts d'un pla afí real dels quals no n'hi ha tres d'alineats. Per a $1 \leq i \leq 4$, sigui S_i la simetria central respecte al punt p_i . Demostreu que es verifica $S_4 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1 = \text{Id}$ si, i només si, els punts p_i són els vèrtexs consecutius d'un paral·lelogram.

2.4 Sigui $\{p; e_1, e_2\}$ un sistema de referència a $\mathbb{A}^2$. Sigui $g: \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$ l'aplicació afí que transforma els punts

$$Q = (2, 1), N = (1, 2), M = (2, 2) \quad \text{en} \quad g(Q) = (3, 1), g(N) = (1, 3), g(M) = (3, 3).$$

Trobeu les equacions de g .

2.5 Considerem les rectes de $\mathbb{A}^2$ que en un sistema de referència tenen les equacions

$$r_1 : x + y = 1; \quad r_2 : x + 2y = 0; \quad r_3 : 4x - y = 2.$$

Trobeu les equacions de les afinitats f tals que $f(r_1) = r_2$, $f(r_2) = r_3$, $f(r_3) = r_1$.

2.6 (Tardor 2016)

(a) Suposem donada una referència en el pla afí real $\mathbb{A}^2$. Demostreu que els punts $P_1 = (-1, 1)$, $P_2 = (1, 2)$ i $P_3 = (5, 4)$ estan alineats i trobeu la raó simple (P_1, P_2, P_3) .

(b) Sigui $f: \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$ una afinitat tal que $f(-1, 1) = (0, -1)$ i $f(1, 2) = (4, 1)$.

(i) Trobeu $f(5, 4)$.

(ii) Demostreu que si $f(-2, 3) = (-2, 3)$ aleshores f és una homotècia. Trobeu les equacions d'aquesta homotècia en la referència donada.

2.7 Una *homologia* és una afinitat que té un hiperplà de punts fixos. Sigui f una homologia del pla. Direm que f és *general de raó* r si $r = \det(\tilde{f}) \neq 1$ on $\tilde{f}$ és l'automorfisme associat a f . Si el determinant de $\tilde{f}$ és 1, direm que f és *especial*. Anomenarem *eix* a la recta de punts fixos.

(a) Trobeu les rectes invariants per una homologia del pla.

(b) Demostreu que si f és general i x és un punt que no és fix aleshores la recta $xf(x)$ talla l'eix en un punt p i es compleix

$$(f(x), x, p) = r.$$

- (c) Demostreu que si f és especial i x és un punt que no és fix aleshores la recta $xf(x)$ és paral·lela a l'eix.
- (d) Determineu gràficament la imatge d'un punt per una homologia general del pla a partir de l'eix, les rectes invariants i la raó.
- (e) Determineu gràficament la imatge d'un punt per una homologia especial del pla a partir de l'eix i la imatge d'un punt donat no fix.

2.8 Sigui f l'afinitat de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ d'equacions

$$\begin{aligned}x^* &= -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + 2 \\ y^* &= \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}y + 2.\end{aligned}$$

- (a) Expressen f com la composició $f = t_u \circ h$ d'una homologia h i una translació t_u paral·lela a l'eix de h .
- (b) Determineu l'eix de h . Busqueu el lloc geomètric dels punts mitjans de p i $f(p)$ per a $p \in \mathbb{A}^2$.

2.9 (Tardor 2020) En el pla afí, siguin f una homologia general d'eix s , direcció u i raó r , i g una homologia general d'eix t paral·lel a s , direcció v i raó R . Sigui $h = g \circ f$. Demostreu que:

- (a) h és una homologia general si, i només si, $Rr \neq 1$ i $\langle u \rangle = \langle v \rangle$.
- (b) h és una translació si, i només si, $Rr = 1$ i $\langle u \rangle = \langle v \rangle$.

2.10 (Tardor 2018) Sigui $ABCD$ un tetràedre en un espai afí de dimensió 3. Sigui A' el punt mitjà de B i C ; sigui B' el punt mitjà de A i C i sigui C' el punt mitjà de A i B . Justifiqueu que existeix una única afinitat f que transforma A en A' , B en B' , C en C' i deixa fix el baricentre de B, C i D . Trobeu els punts fixos i els plans invariants de f .

2.11 Sigui ABC un triangle del pla i O un punt que no pertany a cap dels seus costats. Siguin A', B', C' els punts mitjans dels segments BC, AC i AB respectivament i siguin A'', B'', C'' les imatges de A', B', C' per l'homotècia de centre O i raó r . Demostreu que si $r \neq -2$ llavors les rectes AA'', BB'', CC'' són concurrents. És cert el mateix si $r = -2$?

2.12 (Tardor 2018) Considerem la família d'aplicacions afins $(f_a, \widetilde{f_a})$ d'un espai afí de dimensió 3 en ell mateix que, en una referència donada, tenen matrius associades

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2a & 2 & 1+2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on a és un paràmetre real.

- (a) Trobeu els valors de a per als quals f_a és una afinitat. Per a aquests valors, calculeu el conjunt de punts fixos de f_a en funció del paràmetre a .
- (b) Demostreu que no existeix cap valor de a per al qual es pugui expressar f_a com la composició d'una homotècia de raó positiva i una simetria respecte d'un pla.

2.13 (Tardor 2020) Considerem en el pla afí, amb una referència donada, la recta r d'equació $x - y + 1 = 0$. Sigui s la simetria d'eix r i direcció $\langle(1, 0)\rangle$ i sigui h l'homotècia de centre $(0, 0)$ i raó 2. Definim $f = s \circ h$.

- (a) Trobeu la matriu de f en la referència fixada.
- (b) Calculeu els punts fixos i les rectes invariants per f .
- (c) Demostreu que f^{2n} és una homotècia per a tot $n \geq 1$. Doneu la raó i el centre en funció de n .

2.14 (Tardor 2016) En un pla afí considerem un triangle ABC . Considerem la família d'afinitats que deixen fix A , transformen B en C i deixen invariant la recta BC .

- (a) Trobeu les equacions d'aquestes afinitats en la referència $\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ i demostreu que totes tenen una recta s de punts fixos.
- (b) Demostreu que hi ha una única afinitat f de la família que no té punts fixos sobre la recta BC . Trobeu totes les rectes invariants per f .

2.15 (Tardor 2018) Considerem una afinitat $(f, \tilde{f})$ d'un espai afí de dimensió 3 en ell mateix que, en una referència donada, té matriu associada

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Demostreu que f té un únic punt fix O .
- (b) Trobeu les rectes invariants tals que el seu vector director és propi de valor propi -2 . Comproveu que tots els plans que contenen la recta $y - z = 0$, $x - y = 1$ són invariants.
- (c) Demostreu que existeixen una homotècia de centre O i una simetria s respecte d'un pla tals que $f = h \circ s$. Doneu el pla i la direcció de simetria de s .

2.16 (Tardor 2019) En un espai afí de dimensió 3 suposem donada una referència.

- (a) Justifiqueu que existeix una única afinitat $f: \mathbb{A}^3 \rightarrow \mathbb{A}^3$ tal que $f(0, 0, 0) = (3, 1, 1)$ i tots els punts del pla $x + 2y - z + 1 = 0$ són fixos per f .
- (b) Comproveu que la matriu de f en aquesta referència és la següent:

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (c) Trobeu els punts fixos, les rectes invariants i els plans invariants de f .

2.17 (Tardor 2019) Donats tres punts afíment independents P_1, P_2, P_3 en un pla afí, considerem, per a cada $i = 1, 2, 3$, la simetria f_i respecte de la recta generada pels punts P_j, P_k diferents de P_i i amb la direcció del vector $\overrightarrow{P_i M_i}$, on M_i és el punt mitjà de P_j i P_k . Trobeu els punts fixos i les rectes invariants de $f_1 \circ f_2 \circ f_3$.

2.18 (Tardor 2020) Sigui A_1, A_2, A_3 un triangle d'un pla afí real i siguin M_1 el punt mitjà de A_2 i A_3 , M_2 el punt mitjà de A_1 i A_3 , i M_3 el punt mitjà de A_1 i A_2 . Donat un punt P , denotem per P_i el punt simètric del punt P respecte de M_i .

- (a) Demostreu que les rectes $A_1 P_1$, $A_2 P_2$ i $A_3 P_3$ són concurrents en un punt P' .
- (b) Demostreu que l'aplicació f donada per $f(P) = P'$ és una afinitat.
- (c) Demostreu que f és una homotècia. Doneu-ne el centre i la raó.