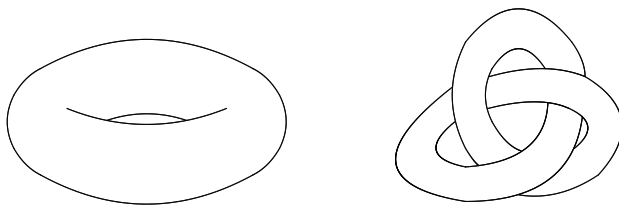


Topologia i Geometria Global de Superfícies

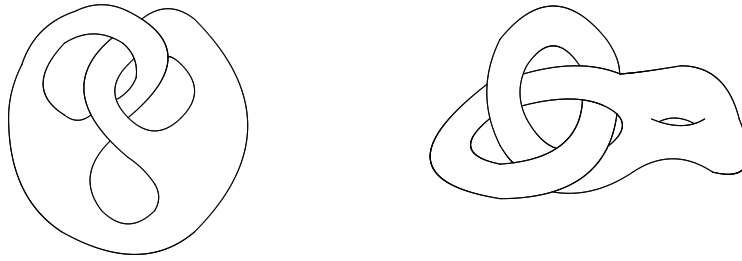
Curs 2021–2022

Llista 3: Superfícies

1. Demostreu que $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ no és homeomorf a $\mathbb{R}^2$.
2. Sigui M una superfície amb vora. L'*interior* $\text{Int}(M)$ es defineix com el subespai format pels punts de M que tenen algun entorn homeomorf a un disc obert i la *vora* ∂M és el complementari de l'interior. Demostreu les afirmacions següents:
 - (a) L'interior $\text{Int}(M)$ és una superfície (sense vora).
 - (b) La vora ∂M és una varietat (sense vora) de dimensió 1.
3. Demostreu que, si $f: M \rightarrow N$ és un homeomorfisme entre superfícies amb vora, llavors f es restringeix a un homeomorfisme $\text{Int}(M) \cong \text{Int}(N)$ i a un homeomorfisme $\partial M \cong \partial N$.
4. Decidiu quins dels espais següents són superfícies o superfícies amb vora:
 - (i) $S^2 \setminus \{p\}$, on p és un punt qualsevol;
 - (ii) $(a, b) \times (c, d)$;
 - (iii) $(a, b) \times [c, d]$;
 - (iv) $[a, b] \times [c, d]$;
 - (v) $(D^2 \times \{0, 1\}) \cup (S^1 \times [0, 1]) \subset \mathbb{R}^3$;
 - (vi) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x > 0, y = \sin(1/x)\}$.
5. Demostreu les propietats següents de la suma connexa:
 - (a) $A \# B \cong B \# A$;
 - (b) $(A \# B) \# C \cong A \# (B \# C)$;
 - (c) $A \# S^2 \cong A$.
6. Demostreu que la suma connexa d'una ampolla de Klein i un pla projectiu és homeomorfa a la suma connexa d'un tor i un pla projectiu.
7. Demostreu que les superfícies següents són homeomorfes:



8. Demostreu que les superfícies següents són homeomorfes:



9. Doneu triangulacions de l'esfera, del tor, del pla projectiu i de l'ampolla de Klein.

10. Siguin X i Y dues superfícies compactes.

(a) Calculeu $\chi(X \# Y)$ en funció de $\chi(X)$ i $\chi(Y)$.

(b) Calculeu $\chi(X \times Y)$ en funció de $\chi(X)$ i $\chi(Y)$.

11. (a) Sigui G un graf pla i connex amb v vèrtexs i a arestes. Demostreu per inducció sobre el nombre d'arestes que si $\mathbb{R}^2 \setminus G$ té c components connexes llavors es compleix la fórmula d'Euler: $v - a + c = 2$.

(b) Un graf és *complet* si per cada parell de vèrtexs hi ha una i només una aresta que els connecta. Demostreu que un graf complet amb cinc vèrtexs no és pla, però que un graf complet amb quatre vèrtexs sí que es pla.

12. Calculeu el grup fonamental de la suma connexa de dues superfícies connexes en termes dels grups fonamentals de les dues superfícies.

13. Calculeu el grup fonamental de l'espai obtingut prenent dos tors T_1 , T_2 i identificant un paral·lel de T_1 amb un paral·lel de T_2 .

14. Classifiqueu les superfícies representades per les paraules següents:

$$\begin{array}{ll} abcdec^{-1}da^{-1}b^{-1}e^{-1} & abcda^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1} \\ mnpmqn^{-1}qp^{-1} & aba^{-1}bcdcd^{-1} \\ abcd a^{-1}b^{-1}c^{-1}d & aba^{-1}bcdcd \end{array}$$

15. Classifiqueu les superfícies representades per les paraules següents per a cada $n \geq 1$:

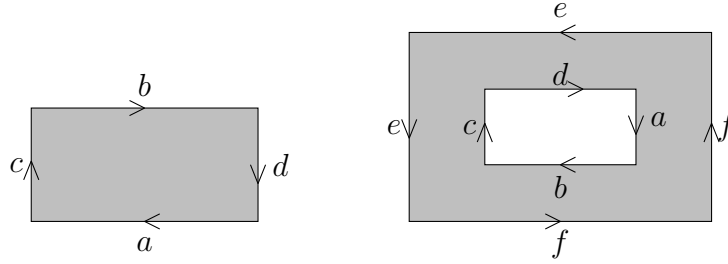
(i) $a_1a_2 \dots a_{n-1}a_na_1^{-1}a_2^{-1} \dots a_{n-1}^{-1}a_n^{-1}$;

(ii) $a_1a_2 \dots a_{n-1}a_na_1^{-1}a_2^{-1} \dots a_{n-1}^{-1}a_n$.

16. Sigui M la superfície representada per la paraula següent:

$$ab^{-1}fc^{-1}gh^{-1}a^{-1}dbed^{-1}hcf^{-1}e^{-1}g^{-1}.$$

- (a) Demostreu que M és orientable i determineu el seu gènere.
(b) Doneu una presentació del grup fonamental de M .
17. Considerem l'espai X que s'obté identificant les arestes de les figures següents de la manera que s'indica. Demostreu que X és una superfície compacta i classifiqueu-la.



18. Suposem donada una superfície compacta connexa M i un disc tancat $D \subset M$ tal que la característica d'Euler de la superfície amb vora $M \setminus \text{Int}(D)$ és igual a -7 , on $\text{Int}(D)$ denota l'interior de D . Tenim prou informació per determinar M llevat d'homeomorfisme? En cas negatiu, quines són les diferents possibilitats per a M a partir de la informació donada?
19. Si una superfície S (no necessàriament connexa) admet una triangulació amb 11 vèrtexs i 24 cares, quina superfície pot ser S ?
20. Denotem per $\mathbb{T}$, $\mathbb{K}$ i $\mathbb{P}$ el tor, l'ampolla de Klein i el pla projectiu, respectivament. Trobeu totes les possibles superfícies compactes X , Y i Z que satisfan els homeomorfismes següents:
- (i) $X \# Y \# Z \cong 2\mathbb{K} \# \mathbb{T}$, $X \# Y \cong Z \# 2\mathbb{T}$, $X \# Z \cong Y \# \mathbb{K}$;
 - (ii) $X \# Y \# Z \cong 3\mathbb{K} \# \mathbb{P} \# \mathbb{T}$, $X \# Z \cong Y \# \mathbb{P} \# 2\mathbb{T}$, $Y \# Z \cong 3\mathbb{K} \# 2X$;
 - (iii) $X \# Y \# Z \cong 2\mathbb{K} \# \mathbb{T}$, $X \# 2Z \cong Y \# 2\mathbb{T}$, $Z \# 2\mathbb{T} \cong 2Y \# \mathbb{P}$;
 - (iv) $X \# Y \cong 2\mathbb{T}$, $X \# \mathbb{T} \cong Y \# \mathbb{K}$.
21. Siguin X i Y dues superfícies compactes. Demostreu que si $X \times \mathbb{R} \cong Y \times \mathbb{R}$ llavors $X \cong Y$. És certa aquesta afirmació si X i Y no són compactes?