

Topologia i Geometria Global de Superfícies

Curs 2021–2022

Llista 5: Varietats de Riemann

1. Demostreu que, si considerem a S^2 la mètrica induïda per la mètrica euclidiana de $\mathbb{R}^3$, llavors l'aplicació antipodal $A: S^2 \rightarrow S^2$ és una isometria. Utilitzeu aquest fet per definir una mètrica de Riemann a $\mathbb{R}P^2$ tal que la projecció $S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ sigui una isometria local.
2. Demostreu que si una mètrica de Riemann satisfà $g_{ij} = 0$ per a tot $i \neq j$ en unes certes coordenades, aleshores els símbols de Christoffel en aquestes coordenades satisfan $\Gamma_{ij}^k = 0$ si els tres índexs i, j, k són diferents, i

$$\Gamma_{ij}^i = \Gamma_{ji}^i = \frac{1}{2g_{ii}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x_j} \text{ per a tot } i \text{ i tot } j; \quad \Gamma_{jj}^i = \frac{-1}{2g_{ii}} \frac{\partial g_{jj}}{\partial x_i} \text{ si } i \neq j.$$

3. Sigui M una superfície amb una mètrica de Riemann $g = E(du)^2 + 2F du dv + G(dv)^2$ en una carta local amb coordenades (u, v) . Demostreu que els símbols de Christoffel de la connexió de Levi-Civita satisfan la igualtat següent, on $\partial_u = \partial/\partial u$ i $\partial_v = \partial/\partial v$:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\partial_u E & \frac{1}{2}\partial_v E & \partial_v F - \frac{1}{2}\partial_u G \\ \partial_u F - \frac{1}{2}\partial_v E & \frac{1}{2}\partial_u G & \frac{1}{2}\partial_v G \end{pmatrix}.$$

4. Parametritzem una carta local del tor a $\mathbb{R}^3$ de radi major R i radi menor r com

$$\begin{cases} x = (R + r \cos u) \cos v \\ y = (R + r \cos u) \sin v \\ z = r \sin u \end{cases}$$

per a $0 < u < 2\pi$, $0 < v < 2\pi$.

- (a) Demostreu que la mètrica g induïda per la mètrica euclidiana de $\mathbb{R}^3$ és

$$g = r^2 (du)^2 + (R + r \cos u)^2 (dv)^2.$$

- (b) Demostreu que els símbols de Christoffel no nuls de la connexió de Levi-Civita són els següents:

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{r}(R + r \cos u) \sin u;$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\frac{r \sin u}{R + r \cos u}.$$

- (c) Escriviu les equacions de les geodèsiques i comproveu que els meridians (v constant) parametritzats amb rapidesa constant $\gamma(t) = (at + b, c)$ són geodèsiques, i també ho són l'equador interior parametritzat com $\gamma(t) = (\pi, at + b)$ i l'equador exterior, que queda fora de la carta local. Els altres paral·lels (u constant diferent de 0 i de π) no són geodèsiques amb cap parametrització.

5. *Semiplà de Poincaré.* Denotem per $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ el semiplà superior. Considerem a $\mathbb{H}^2$ la mètrica g amb coeficients

$$g_{11} = \frac{1}{y^2}; \quad g_{12} = 0; \quad g_{22} = \frac{1}{y^2}.$$

- (i) Demostreu que g és una mètrica de Riemann i que aquesta mètrica determina els mateixos angles que la mètrica euclidiana.
 - (ii) Calculeu els símbols de Christoffel de la connexió de Levi-Civita d'aquesta mètrica i escriviu les equacions de les geodèsiques a $\mathbb{H}^2$.
 - (iii) Comproveu que les imatges de les geodèsiques a $\mathbb{H}^2$ són els segments de semirectes verticals i els arcs de circumferències ortogonals a la vora de $\mathbb{H}^2$.
6. *Disc de Beltrami–Poincaré.* Denotem per $\mathbb{D}^2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$ el disc obert de radi 1 centrat a l'origen. Considerem a $\mathbb{D}^2$ la mètrica g amb coeficients

$$g_{11} = \frac{4}{(1 - u^2 - v^2)^2}; \quad g_{12} = 0; \quad g_{22} = \frac{4}{(1 - u^2 - v^2)^2}.$$

- (i) Demostreu que g és una mètrica de Riemann i que aquesta mètrica determina els mateixos angles que la mètrica euclidiana.
- (ii) Calculeu els símbols de Christoffel de la connexió de Levi-Civita d'aquesta mètrica i escriviu les equacions de les geodèsiques a $\mathbb{D}^2$.
- (iii) Comproveu que les imatges de les geodèsiques a $\mathbb{D}^2$ són els arcs de circumferències ortogonals a la vora de $\mathbb{D}^2$ i els segments de diàmetres.
- (iv) Demostreu que la transformació de Cayley $C: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ definida com

$$C(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

és una isometria del semiplà de Poincaré al disc de Beltrami–Poincaré.

7. Denotem per $S_+^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$ la semiesfera superior oberta. Considerem la carta local (S_+^2, φ) donada per la projecció estereogràfica des del pol sud $(0, 0, -1)$; és a dir, $(u, v) = \varphi(x, y, z) = (1/(1 + z))(x, y)$. Considerem a S_+^2 la mètrica g amb coeficients

$$g_{11} = \frac{4}{(1 - u^2 - v^2)^2}; \quad g_{12} = 0; \quad g_{22} = \frac{4}{(1 - u^2 - v^2)^2}$$

en aquesta carta local.

- (i) Demostreu que g és una mètrica de Riemann i que aquesta mètrica determina els mateixos angles que la mètrica a S_+^2 induïda per la mètrica euclidiana de $\mathbb{R}^3$.
- (ii) Comproveu que les imatges de les geodèsiques a S_+^2 amb aquesta mètrica g són els arcs de circumferències ortogonals a l'equador de S^2 .
- (iii) Demostreu que l'aplicació de coordenades $\varphi: S_+^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ defineix una isometria amb el disc de Beltrami–Poincaré.

8. *Isometries del pla hiperbòlic.*

- (a) Demostreu que, si a, b, c, d són nombres reals amb $ad - bc = 1$, llavors l'aplicació $f: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ donada per $f(z) = (az + b)/(cz + d)$ és una isometria positiva.
- (b) Demostreu que, si a, b, c, d són nombres reals amb $ad - bc = -1$, llavors l'aplicació $f: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$, $f(z) = (a\bar{z} + b)/(c\bar{z} + d)$ és una isometria negativa.
- (c) Demostreu que les inversions I_r i les simetries S_a donades per

$$I_r(z) = \frac{r^2 z}{|z|^2}; \quad S_a(z) = -(\overline{z - a}) + a,$$

on $r > 0$ i a és un nombre real qualsevol, són isometries de $\mathbb{H}^2$.

- (d) Demostreu que tota isometria de $\mathbb{H}^2$ és composició d'inversions i simetries.
- (e) Demostreu que tota isometria positiva de $\mathbb{H}^2$ es pot expressar com

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

amb a, b, c, d reals tals que $ad - bc = 1$.

- (f) Demostreu que, si dues isometries positives de $\mathbb{H}^2$ coincideixen en tres punts, llavors són iguals.
- (g) Deduïu dels apartats anteriors que el grup d'isometries positives de $\mathbb{H}^2$ és isomorf al quocient $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ del grup $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ de matrius 2×2 amb coeficients reals i determinant 1 pel subgrup $\{\text{Id}, -\text{Id}\}$.

9. *Distància al pla hiperbòlic.*

- (a) Sigui z i w dos punts del semiplà $\mathbb{H}^2$. Demostreu que existeix una única geodèsica $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ tal que $\gamma(0) = z$, $\gamma(1) = w$ i que la longitud d'aquesta geodèsica és $\ln(a/b)$ si $z = (0, a)$ i $w = (0, b)$ amb $a > b$ i, en general,

$$l(\gamma) = \ln \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} = 2 \operatorname{arctanh} \frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|}.$$

- (b) Demostreu que l'aplicació $d: \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que assigna a cada parell de punts z i w la longitud de la geodèsica $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ tal que $\gamma(0) = z$ i $\gamma(1) = w$ és una distància.
- (c) Utilitzant la isometria $\mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ de l'exercici 6, demostreu que la distància en el disc de Beltrami–Poincaré és

$$d(z, w) = 2 \operatorname{arctanh} \frac{|z - w|}{|1 - z\bar{w}|}.$$

- (d) Demostreu que la circumferència hiperbòlica de centre $(0, 0)$ i radi r al disc $\mathbb{D}^2$ coincideix amb la circumferència euclidiana de radi $(e^r - 1)/(e^r + 1)$.
- (e) Demostreu que les circumferències hiperbòliques a $\mathbb{D}^2$ i a $\mathbb{H}^2$ coincideixen amb les circumferències euclidianes contingudes, respectivament, a $\mathbb{D}^2$ i a $\mathbb{H}^2$.