

Topologia i Geometria Global de Superfícies

Curs 2022–2023

Llista 1: Homotopia d'aplicacions

1. Demostreu que per a qualsevol parell d'espais topològics X i Y la relació d'homotopia $f \simeq g$ és una relació d'equivalència en el conjunt de les aplicacions contínues $X \rightarrow Y$.
2. (a) Demostreu que si $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ i $g_0, g_1: Y \rightarrow Z$ són aplicacions contínues tals que $f_0 \simeq f_1$ i $g_0 \simeq g_1$ llavors $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$.
(b) Demostreu que la relació d'equivalència homotòpica $X \simeq Y$ entre espais topològics és una relació d'equivalència.
3. (a) Demostreu que si $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ i $g_0, g_1: A \rightarrow B$ són aplicacions contínues tals que $f_0 \simeq f_1$ i $g_0 \simeq g_1$ llavors $f_0 \times g_0 \simeq f_1 \times g_1$, on $f_i \times g_i$ denota l'aplicació $X \times A \rightarrow Y \times B$ definida com $(f_i \times g_i)(x, a) = (f_i(x), g_i(a))$.
(b) Demostreu que si $X \simeq Y$ i $A \simeq B$ llavors $X \times A \simeq Y \times B$.
4. Per a cada espai topològic X , denotem per $\text{HT}(X)$ el conjunt de les classes d'homotopia d'aplicacions $f: X \rightarrow X$ que són equivalències homotòpiques.
(a) Demostreu que $\text{HT}(X)$ admet estructura de grup amb l'operació induïda per la composició d'aplicacions.
(b) Demostreu que si X i Y són espais homotòpicament equivalents llavors els grups $\text{HT}(X)$ i $\text{HT}(Y)$ són isomorfs.
5. Demostreu que la connexió i la connexió per camins són propietats homotòpiques (és a dir, si X té la propietat i $X \simeq Y$, llavors Y també té la propietat), però que ni la compacitat ni les propietats de separació T_1 , T_2 , T_3 i T_4 no són propietats homotòpiques.
6. Demostreu que un espai X és contràctil si i només si l'aplicació identitat $X \rightarrow X$ és homòtopa a l'aplicació constant $f(x) = x_0$ per a algun $x_0 \in X$.
7. Un subconjunt X de $\mathbb{R}^n$ s'anomena *estrellat* si existeix un punt $x_0 \in X$ tal que el segment que uneix x_0 amb qualsevol altre punt de X és contingut a X .
(a) Demostreu que tot subconjunt convex de $\mathbb{R}^n$ és estrellat.
(b) Demostreu que tot subconjunt estrellat de $\mathbb{R}^n$ és contràctil.
8. Demostreu que, si $X \neq \emptyset$, llavors l'espai $CX = (X \times [0, 1]) / (X \times \{1\})$ és contràctil.
9. Demostreu que tot retracte d'un espai contràctil és contràctil.

10. Sigui X un espai topològic i suposem donades dues aplicacions contínues $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow X$ amb $n \geq 1$. Demostreu que l'aplicació composta $g \circ f$ és homòtopa a una aplicació constant.
11. Demostreu que si una aplicació contínua $f: X \rightarrow S^n$ no és exhaustiva llavors f és homòtopa a una aplicació constant.
12. Demostreu que si una aplicació contínua $f: S^n \rightarrow S^n$ no té cap punt fix llavors f és homòtopa a la aplicació antipodal.
13. Demostreu que si n és senar llavors l'aplicació antipodal $S^n \rightarrow S^n$ és homòtopa a l'aplicació identitat. (Indicació: resolcu primer el cas $n = 1$.)
14. Demostreu que cadascun dels espais següents és homotòpicament equivalent a una unió puntual d'una o més esferes i determineu la dimensió d'aquestes esferes en cada cas:
 - (a) $\mathbb{R}^n \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$, on $p_1, \dots, p_k$ són punts diferents.
 - (b) $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m$.
 - (c) $\mathbb{R}^3$ menys n rectes concurrents.
 - (d) $S^3 \setminus S^1$.
 - (e) $(S^1 \times S^1) \setminus \{p\}$, on p és un punt qualsevol.
15. Demostreu que l'espai $\mathbb{R}^3 \setminus ((\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}) \cup (S^1 \times \{0\}))$ és homotòpicament equivalent al tor $S^1 \times S^1$.
16. Demostreu que la unió de la circumferència unitat a $\mathbb{R}^2$ amb l'eix vertical és homotòpicament equivalent a la unió puntual de dues circumferències.
17. Demostreu que el complement d'un punt a l'espai projectiu real $\mathbb{R}P^k$ és homotòpicament equivalent a $\mathbb{R}P^{k-1}$ per a tot $k \geq 1$.
18. Demostreu que l'espai de configuracions de dos punts ordenats a $\mathbb{R}^3$,

$$\text{Conf}_2(\mathbb{R}^3) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid x_1 \neq x_2\},$$

és homotòpicament equivalent a S^2 .

19. (a) Demostreu que si X és un espai de Hausdorff i A és un retracte de X aleshores A és un subespai tancat de X .
 (b) Determineu quins subespais de l'interval $I = [0, 1]$ són retractes de I .
20. Demostreu que la vora de qualsevol bola tancada $B \subset \mathbb{R}^n$ és un retracte de deformació fort de $B \setminus \{p\}$ per a tot punt p interior a B .
21. La *cinta de Möbius* és el quocient de $[-1, 1] \times [-1, 1]$ per la relació que identifica cada punt de la forma $(-1, y)$ amb $(1, -y)$. Demostreu que la cinta de Möbius té un retracte de deformació fort homeomorf a S^1 .

22. Per a cada $n > 0$, sigui X_n el segment que uneix els punts $(0, 0)$ i $(1/n, 1)$ de $\mathbb{R}^2$, i sigui X_0 el segment que uneix els punts $(0, 0)$ i $(0, 1)$. Siguí $X = \cup_{n=0}^{\infty} X_n$. Demostreu que el punt $(0, 0)$ és un retracte de deformació fort de X , però que $(0, 1)$ no ho és.
23. Dos espais amb punt base (X, x_0) , (Y, y_0) són *homotòpicament equivalents* si existeixen aplicacions contínues $f: X \rightarrow Y$ i $g: Y \rightarrow X$ tals que $f(x_0) = y_0$, $g(y_0) = x_0$, $g \circ f \simeq \text{id}_X \text{ rel } \{x_0\}$ i $f \circ g \simeq \text{id}_Y \text{ rel } \{y_0\}$. La *unió puntual* o *coproducte* de dos espais amb punt base (X, x_0) , (A, a_0) es denota per $X \vee A$ i es defineix com el quocient de la unió disjunta de X i A per la relació que identifica x_0 amb a_0 . Demostreu que si $(X, x_0) \simeq (Y, y_0)$ i $(A, a_0) \simeq (B, b_0)$ llavors $X \vee A \simeq Y \vee B$.
24. Demostreu que, si X és l'espai definit a l'exercici 22, llavors els espais amb punt base $(X, (0, 0))$ i $(X, (0, 1))$ no són homotòpicament equivalents.