

Topologia i Geometria Global de Superfícies

Curs 2023–2024

Llista 2: Varietats diferenciables

1. A l'esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ considerem els punts $N = (0, \dots, 0, 1)$ i $S = (0, \dots, 0, -1)$ i els oberts $U_N = S^n \setminus \{N\}$, $U_S = S^n \setminus \{S\}$. Demostreu que les cartes locals (U_N, φ_N) , (U_S, φ_S) donades per les projeccions estereogràfiques

$$\begin{aligned}\varphi_N: U_N &\rightarrow \mathbb{R}^n; & \varphi_N(x_1, \dots, x_{n+1}) &= \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n) \\ \varphi_S: U_S &\rightarrow \mathbb{R}^n; & \varphi_S(x_1, \dots, x_{n+1}) &= \frac{1}{1 + x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n)\end{aligned}$$

formen un atlas diferenciable de S^n . En el cas $n = 2$, demostreu que la imatge per φ_N i φ_S d'un cercle màxim és una circumferència o una recta.

2. A l'esfera S^n considerem, per a cada $i = 1, \dots, n + 1$, els oberts

$$\begin{aligned}U_{i,+} &= \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_i > 0\} \\ U_{i,-} &= \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_i < 0\}.\end{aligned}$$

Demostreu que les cartes locals $\{(U_{i,+}, \varphi_{i,+}), (U_{i,-}, \varphi_{i,-})\}_{i=1, \dots, n+1}$ amb

$$\varphi_{i,\pm}: U_{i,\pm} \rightarrow \mathbb{R}^n; \quad \varphi_{i,\pm}(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$$

formen un atlas diferenciable de S^n . Comproveu que aquest atlas és equivalent a l'atlas donat per les projeccions estereogràfiques a l'exercici 1.

3. Demostreu que l'esfera S^n no admet cap atlas diferenciable amb una sola carta.
4. A l'espai projectiu $\mathbb{R}P^n$ es considera el conjunt $\mathcal{U} = \{(U_1, \phi_1), \dots, (U_{n+1}, \phi_{n+1})\}$ on $U_i = \{[x_1, \dots, x_{n+1}] \in \mathbb{R}P^n \mid x_i \neq 0\}$ i l'aplicació $\phi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ es defineix com

$$\phi_i([x_1, \dots, x_{n+1}]) = \frac{1}{x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}).$$

Demostreu que $\mathcal{U}$ és un atlas diferenciable de $\mathbb{R}P^n$ i que ϕ_i envia rectes a rectes.

5. Demostreu que, si pensem $\mathbb{R}P^n$ com el quocient de S^n per la relació que identifica punts antipodals, llavors l'aplicació quocient $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ és diferenciable i és un difeomorfisme local.
6. Demostreu que, si $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ és un atlas diferenciable en una varietat M de dimensió m i $\{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ és un atlas diferenciable en una varietat N de dimensió n , llavors $\{(U_i \times V_j, \varphi_i \times \psi_j)\}_{i \in I, j \in J}$ és un atlas diferenciable a $M \times N$.
7. Doneu un atlas diferenciable per al tor $S^1 \times \dots \times S^1$ de dimensió n .

8. Donades dues constants $a, b > 0$, sigui $f: S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'aplicació donada per

$$f(e^{i\alpha}, e^{i\beta}) = ((a + b \cos \alpha) \cos \beta, (a + b \cos \alpha) \sin \beta, b \sin \alpha).$$

- (a) Demostreu que si $a \leq b$ llavors f no és una immersió.
 (b) Demostreu que si $a > b$ llavors f és un encabiment.
9. Siguin $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'aplicació $F(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$. Demostreu que F induïx una aplicació diferenciable $f: \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ i que f és un encabiment.
10. Siguin M_1 i M_2 dues superfícies diferenciables. Siguin $f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow M_1$ i $f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow M_2$ dos encabiments. Definim la suma connexa $M_1 \# M_2$ com l'espai quocient de

$$(M_1 \setminus \{f_1(0)\}) \cup (M_2 \setminus \{f_2(0)\})$$

per la relació $f_1(x) \sim f_2(1/x)$. Doneu un atlas diferenciable per a $M_1 \# M_2$ en funció dels atlas diferenciables de M_1 i M_2 . (*Indicació:* Observeu que f_1^{-1} i f_2^{-1} defineixen cartes compatibles amb els atlas de M_1 i M_2 .)

11. Amb la notació de l'exercici 8, sigui $f: S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'aplicació que resulta de prendre $a = 2$, $b = 1$, i sigui g l'aplicació que resulta de prendre $a = 0$, $b = 1$.
- (a) Comproveu que la imatge de g està continguda a S^2 .
 (b) Demostreu, prenent cartes, que $g: S^1 \times S^1 \rightarrow S^2$ és una aplicació diferenciable.
 (c) Trobeu els punts regulars de $g: S^1 \times S^1 \rightarrow S^2$.
 (d) Comproveu que $g(p) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ és ortogonal al pla tangent $T_{f(p)}(f(S^1 \times S^1))$.
 (e) Demostreu que $g: S^1 \times S^1 \rightarrow S^2$ es homòtopa a una aplicació constant.
12. Demostreu que el subconjunt M de $\mathbb{R}^4$ definit per les equacions següents és una subvarietat de dimensió 2 de $\mathbb{R}^4$:

$$x^2 - y^2 + z^2 - t^2 = 1, \quad xy + zt = 0.$$

13. Demostreu que el subconjunt M de $\mathbb{R}^4$ donat per $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 1$ és una subvarietat de $\mathbb{R}^4$ i trobeu una base de l'espai tangent $T_p M$ per a $p = (1, -1, 0, 1)$. Demostreu que $f(x, y, z, t) = (x - y, z - t)$ és una aplicació diferenciable $M \rightarrow \mathbb{R}^2$ i trobeu la matriu de $(df)_p$ en la base anterior.
14. Considerem l'esfera S^2 amb l'atles de l'exercici 1. Demostreu que els camps locals

$$\begin{aligned} X_{U_1}: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2; & X_{U_1}(u, v) &= (u, v) \\ X_{U_2}: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2; & X_{U_2}(s, t) &= (-s, -t) \end{aligned}$$

defineixen un camp vectorial diferenciable a S^2 .

15. Demostreu que els camps vectorials següents a $\mathbb{R}^4$ són tangents a l'esfera S^3 i són linealment independents en cada punt de S^3 :

$$X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} - t \frac{\partial}{\partial z} + z \frac{\partial}{\partial t}$$

$$Y = -z \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z} - y \frac{\partial}{\partial t}$$

$$Z = -t \frac{\partial}{\partial x} - z \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial z} + x \frac{\partial}{\partial t}$$

16. Sigui M una varietat diferenciable i sigui (U, φ) una carta local amb coordenades $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$.

- (a) Demostreu que $(df)X = X(f)$ per a tot camp vectorial X a M i qualsevol funció diferenciable f a M .
- (b) Demostreu que $(dx_1)_p, \dots, (dx_n)_p$ és una base de l'espai vectorial dual $(T_p M)^*$ per a tot $p \in U$ i que aquesta base és dual de $(\partial/\partial x_1)_p, \dots, (\partial/\partial x_n)_p$.
- (c) Demostreu que per a tota funció diferenciable $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ es compleix

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \quad \text{en tot punt } p \in U.$$

- (d) Demostreu que tota $f \in \mathcal{F}(M)$ defineix una aplicació $df: \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$ que és $\mathcal{F}(M)$ -lineal, és a dir, $(df)gX = g(df)X$ per a tota $g \in \mathcal{F}(M)$.
- (e) Si denotem per $\Omega(M)$ l'espai vectorial de les aplicacions $\omega: \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$ que són $\mathcal{F}(M)$ -lineals, demostreu que $(\omega, X) \mapsto \omega(X)$ defineix una aplicació

$$\Omega(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$$

que és $\mathcal{F}(M)$ -lineal en cada variable. Els elements de $\Omega(M)$ es diuen *1-formes diferencials* o bé *camps covariants* a M .

- (f) Demostreu que tota $\omega \in \Omega(M)$ s'escriu, de manera única, com

$$\omega = \omega_1 dx_1 + \dots + \omega_n dx_n$$

en la carta local (U, φ) , on $\omega_1, \dots, \omega_n$ són funcions $U \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables.

17. Considerem l'esfera S^2 amb l'atles de l'exercici 1. Demostreu que els camps locals

$$W_{U_1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad W_{U_1}(u, v) = \frac{1}{(1 + u^2 + v^2)^2} (1 - u^2 + v^2, -2uv)$$

$$W_{U_2}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad W_{U_2}(s, t) = \frac{1}{(1 + s^2 + t^2)^2} (1 - s^2 + t^2, -2st)$$

defineixen una 1-forma diferencial a S^2 .