

Topologia i Geometria Global de Superfícies

Curs 2023–2024

Llista 3: Grup fonamental

En aquesta llista d'exercicis, totes les homotopies de camins són relatives als extrems de l'interval $[0, 1]$, encara que no s'especifiqui.

1. (a) Demostreu que, si σ, σ', ω i ω' són camins en un espai X tals que $\sigma(0) = \sigma'(0)$; $\sigma(1) = \sigma'(1) = \omega(0) = \omega'(0)$; $\omega(1) = \omega'(1)$; $\sigma \simeq \sigma'$ i $\omega \simeq \omega'$, llavors es compleix que $\sigma * \omega \simeq \sigma' * \omega'$.
(b) Per a cada punt p d'un espai X , denotem per c_p el camí a X constant en el punt p . Demostreu que si σ és un camí qualsevol a X llavors $c_{\sigma(0)} * \sigma \simeq \sigma$ i $\sigma * c_{\sigma(1)} \simeq \sigma$.
(c) Per a cada camí σ en un espai X , denotem per $\bar{\sigma}$ el camí invers, definit com $\bar{\sigma}(t) = \sigma(1 - t)$ per a tot $t \in I$. Demostreu que $\sigma * \bar{\sigma} \simeq c_{\sigma(0)}$ i $\bar{\sigma} * \sigma \simeq c_{\sigma(1)}$.
2. Demostreu que si $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ i β_2 són camins en un espai X amb $\alpha_1 * \beta_1 \simeq \alpha_2 * \beta_2$ i a més $\alpha_1 \simeq \alpha_2$ llavors $\beta_1 \simeq \beta_2$.
3. Demostreu que un espai X és simplement connex si i només si per a tot parell de punts $x, y \in X$ hi ha una única classe d'homotopia de camins de x a y .
4. Considerem el grup ortogonal especial $SO(3)$, format per les matrius de les rotacions a $\mathbb{R}^3$, amb la topologia euclidiana i punt base la matriu identitat.
(a) Demostreu que $SO(3)$ és homeomorf a l'espai projectiu real $\mathbb{R}P^3$.
(b) Demostreu que si ρ denota el llaç a $SO(3)$ definit per les rotacions al voltant de l'eix $x = y = 0$, llavors $\rho * \rho$ és homòtop al llaç constant en el punt base.
5. Sigui X, Y espais amb punts base respectius x_0, y_0 .
(a) Demostreu que $\pi(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi(X, x_0) \times \pi(Y, y_0)$.
(b) Demostreu que si σ és un llaç a $X \times \{y_0\}$ amb $\sigma(0) = \sigma(1) = (x_0, y_0)$ i ω és un llaç a $\{x_0\} \times Y$ amb $\omega(0) = \omega(1) = (x_0, y_0)$ llavors $\sigma * \omega \simeq \omega * \sigma$ a $X \times Y$.
(c) Demostreu que si $\pi(X, x_0)$ i $\pi(Y, y_0)$ són grups commutatius, llavors el grup $\pi(X \times Y, (x_0, y_0))$ també és commutatiu.
(c) Calculeu el grup fonamental del tor $S^1 \times \cdots \times S^1$ de dimensió n .
6. Demostreu que el grup fonamental de la unió puntual $S^1 \vee S^1$ no és commutatiu.
7. Demostreu que, si D^2 denota el disc unitat tancat de $\mathbb{R}^2$ i $f: D^2 \rightarrow D^2$ és un homeomorfisme, llavors $f(S^1) = S^1$.

8. Un espai X té la *propietat del punt fix* si per a tota aplicació contínua $f: X \rightarrow X$ existeix algun punt $p \in X$ tal que $f(p) = p$.
- (a) Demostreu que si un espai X té la propietat del punt fix i A és un retracte de X , llavors A també té la propietat del punt fix. Deduïu-ne que si el producte $X \times Y$ de dos espais té la propietat del punt fix, llavors X i Y també la tenen.
 - (b) Demostreu que la propietat del punt fix es conserva per homeomorfismes però no es conserva per equivalències homotòpiques.
 - (c) Decidiu quins dels espais següents tenen la propietat del punt fix: l'esfera S^n ; una bola oberta de dimensió n ; el tor $S^1 \times \cdots \times S^1$ de dimensió n ; el disc tancat D^2 ; la unió puntual $S^1 \vee S^1$; la unió puntual $D^2 \vee D^2$.
9. Demostreu que tota aplicació contínua $S^2 \rightarrow S^2$ no exhaustiva té algun punt fix.
10. Sigui $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Demostreu que tota aplicació contínua $X \rightarrow X$ homòtopa a una aplicació constant té algun punt fix.
11. Demostreu que tota matriu 3×3 amb coeficients positius té algun valor propi positiu.
12. (a) Sigui X i Y espais amb punts base respectius x_0 i y_0 . Demostreu que, si tota aplicació contínua $X \rightarrow X$ té algun punt fix i tota aplicació contínua $Y \rightarrow Y$ té algun punt fix, aleshores tota aplicació contínua $X \vee Y \rightarrow X \vee Y$ té algun punt fix. (*Indicació:* considereu les retraccions de $X \vee Y$ sobre X i sobre Y .)
- (b) Un *arbre* és un graf connex sense cicles. Demostreu que si G és un arbre finit a $\mathbb{R}^2$ aleshores tota aplicació contínua $G \rightarrow G$ té algun punt fix.
13. (a) Demostreu que per a tota aplicació contínua $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ existeix algun punt $x \in S^1$ tal que $f(x) = f(-x)$ (teorema de Borsuk–Ulam en dimensió 1).
- (b) Demostreu que per a tota aplicació contínua $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ existeix algun punt $x \in S^2$ tal que $f(x) = f(-x)$ (teorema de Borsuk–Ulam en dimensió 2).
- (c) Demostreu que no hi ha cap subespai de $\mathbb{R}$ homeomorf a S^1 ni cap subespai de $\mathbb{R}^2$ homeomorf a S^2 .
14. Calculeu l'índex del camí tancat

$$\gamma(t) = e^{4\pi it} + e^{2\pi it} + 1, \quad 0 \leq t \leq 1$$

al pla complex respecte als punts $p_1 = 0, 5$; $p_2 = 4$; $p_3 = 1 + i$.

15. Sigui n, m enters positius. Trobeu el grau de l'aplicació $f: S^1 \rightarrow S^1$ donada per

$$f(x, y) = \frac{(x^n, x^m)}{\|(x^n, x^m)\|}.$$

16. (a) Demostreu que l'índex del camí tancat

$$\beta(t) = ((\cos t)^3 + \tfrac{1}{2}, \sin 2t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

respecte al punt $(0, 0)$ és -1 .

(b) Demostreu que el sistema d'equacions

$$\begin{cases} x^3 + x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 2xy = 1 \end{cases}$$

té alguna solució a $\mathbb{R}^2$.

17. (a) Demostreu que, si una aplicació contínua $g: S^1 \rightarrow S^1$ es pot estendre a una aplicació contínua $D^2 \rightarrow S^1$, on D^2 denota el disc tancat, llavors g té grau 0.
- (b) Siguin f i g dues aplicacions contínues $D^2 \rightarrow D^2$. Demostreu que si $g(S^1) \subseteq S^1$ i el grau de la restricció $g: S^1 \rightarrow S^1$ és diferent de zero, llavors hi ha algun punt $x_0 \in D^2$ tal que $f(x_0) = g(x_0)$.
- (c) Calculeu el grau de l'aplicació $g: S^1 \rightarrow S^1$ donada per $g(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.
- (d) Demostreu que el sistema d'equacions següent té alguna solució a $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \cos(x + y + y^2) - x^2 + y^2 = 0 \\ \sin(x + y + y^2) - 2xy = 0. \end{cases}$$

18. Demostreu que el sistema d'equacions següent té alguna solució a $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \cos(1 + \sin(x^2 + y^7)) = x \\ \sin(1 + \cos(x^7 + y^2)) = y. \end{cases}$$

19. (a) Demostreu que el camí tancat

$$\gamma(t) = (5 \cos 4\pi t + \sin^4 2\pi t - 1, 5 \sin 4\pi t + \cos^7 2\pi t - 2)$$

no passa per $(0, 0)$ i calculeu l'índex de γ respecte a $(0, 0)$.

- (b) Demostreu que el sistema d'equacions següent té alguna solució a $\mathbb{R}^2$ de mòdul menor que 0,7:

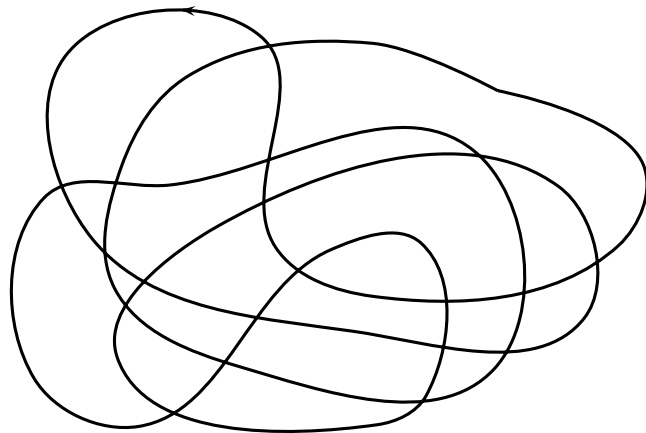
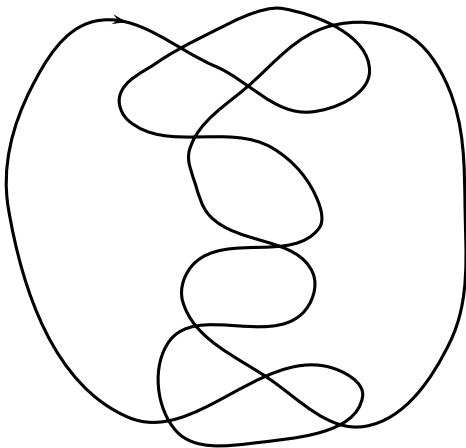
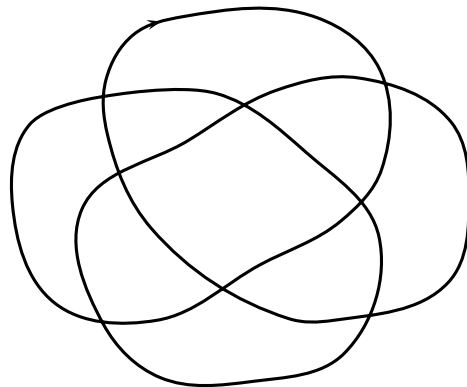
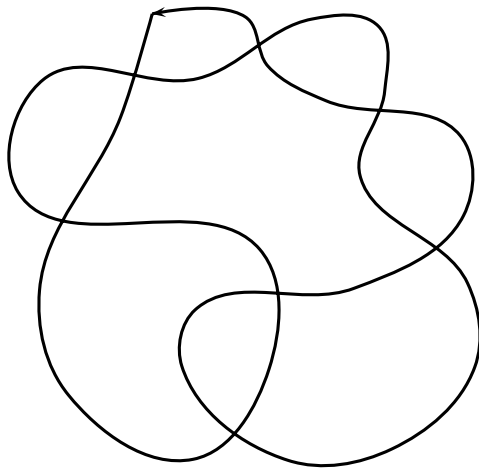
$$\begin{cases} 5x^2 - 5y^2 + y^4 = 1 \\ x^7 + 10xy = 2. \end{cases}$$

20. Sigui $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicació contínua. Demostreu que, si existeix una constant $C > 0$ tal que $|f(p) - p| < C$ per a tot $p \in \mathbb{R}^2$, llavors f és exhaustiva. Deduïu d'aquest fet que el sistema d'equacions

$$\begin{cases} e^{1/(1+x^2+y^2)} = a - x \\ \sin(cx^2 + e^{y^2}) = b - y \end{cases}$$

té solució per a tot $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

21. Per a cada regió delimitada per cadascun dels camins següents, determineu el nombre de voltes del camí respecte a un punt arbitrari situat a l'interior de la regió.



22. Demostreu que l'espai $S^2 \cup \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ és simplement connex.
23. Demostreu que $S^2 \cup \{(x, 0, 0) \mid -1 \leq x \leq 1\}$ no és homotòpicament equivalent a S^2 .
24. (a) Demostreu que una esfera S^2 menys dos punts és homotòpicament equivalent, però no homeomorfa, a un pla projectiu menys un punt.
- (b) Demostreu que una esfera S^2 menys dos punts no és homotòpicament equivalent a una esfera menys un punt.
- (c) Demostreu que una esfera S^2 menys tres punts no és homotòpicament equivalent a una esfera menys dos punts.

25. Demostreu que els espais X i Y següents no són homotòpicament equivalents:

$$X = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0), (0, 2, 0)\}, \quad Y = \mathbb{R}^3 \setminus [\{(0, 0, 0)\} \cup L],$$

on $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, y = 2\}$.

26. Trobeu el grup fonamental dels espais següents amb un punt base adient:

- (a) $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$;
- (b) $\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$;
- (c) $\mathbb{R}^3 \setminus (A \cup B)$ on A i B són dues rectes que no es tallen;
- (d) $\mathbb{R}^3 \setminus (\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, z = 0\} \cup \{(x, y, z) \mid (x - 1)^2 + z^2 = 1, y = 0\})$.

27. Un *grup topològic* és un grup G amb una topologia tal que l'aplicació multiplicació $\mu: G \times G \rightarrow G$, $\mu(x, y) = xy$ és contínua si es considera a $G \times G$ la topologia producte, i l'aplicació $\iota: G \rightarrow G$ de pas a l'invers, $\iota(x) = x^{-1}$, també és contínua.

- (a) Demostreu que els espais següents admeten estructura de grup topològic: $\mathbb{R}^n$ amb la suma, per a tot n ; $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ amb el producte de nombres complexos; $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ amb el producte de quaternions; S^1 ; S^3 ; $\text{GL}_n(\mathbb{R})$, $\text{O}(n)$ i $\text{SO}(n)$ amb el producte de matrius, per a tot n .
- (b) Demostreu que si G és un grup topològic llavors $G \times G$ també ho és.
- (c) Demostreu que si G és un grup topològic llavors $\pi(G, p)$ és commutatiu per a tot $p \in G$.
- (d) Demostreu que l'ampolla de Klein no admet estructura de grup topològic.
- (e) Demostreu que $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ admet estructura de grup topològic però en canvi $\mathbb{R}^2 \setminus \{p, q\}$ no l'admet si $p \neq q$.