

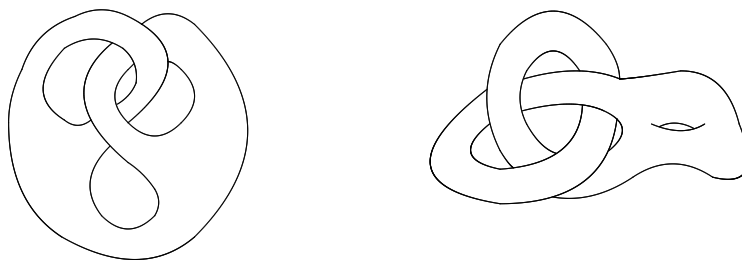
# Topologia i Geometria Global de Superfícies

Curs 2023–2024

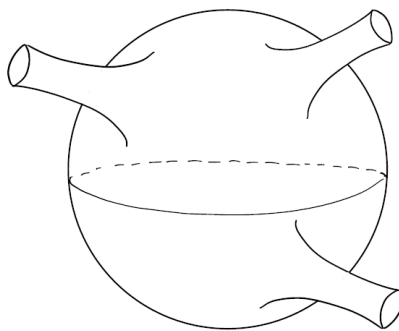
## Llista 4: Superfícies

1. Demostreu que  $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$  no és homeomorf a  $\mathbb{R}^2$ .
2. Sigui  $M$  una superfície amb vora. L'*interior*  $\text{Int}(M)$  es defineix com el subespai format pels punts de  $M$  que tenen algun entorn homeomorf a un disc obert i la *vora*  $\partial M$  és el complementari de l'interior. Demostreu les afirmacions següents:
  - (a) L'interior  $\text{Int}(M)$  és una superfície (sense vora).
  - (b) La vora  $\partial M$  és una varietat (sense vora) de dimensió 1.
3. Demostreu que, si  $f: M \rightarrow N$  és un homeomorfisme entre superfícies amb vora, llavors  $f$  es restringeix a un homeomorfisme  $\text{Int}(M) \cong \text{Int}(N)$  i a un homeomorfisme  $\partial M \cong \partial N$ .
4. Decidiu quins dels espais següents són superfícies o superfícies amb vora:
  - (i)  $S^2 \setminus \{p\}$ , on  $p$  és un punt qualsevol;
  - (ii)  $(a, b) \times (c, d)$ ;
  - (iii)  $(a, b) \times [c, d]$ ;
  - (iv)  $[a, b] \times [c, d]$ ;
  - (v)  $(D^2 \times \{0, 1\}) \cup (S^1 \times [0, 1]) \subset \mathbb{R}^3$ ;
  - (vi)  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x > 0, y = \sin(1/x)\}$ .
5. Demostreu els fets següents:
  - (a) Donats dos discs tancats  $D$  i  $D'$  en una superfície connexa  $M$ , sempre existeix algun homeomorfisme  $f: M \rightarrow M$  tal que  $f(D) = D'$ .
  - (b) Per a tot homeomorfisme  $f: S^1 \rightarrow S^1$  que conservi l'orientació existeix una homotopia  $H: S^1 \times I \rightarrow S^1$  amb  $H_0 = f$ ,  $H_1 = \text{id}$  i tal que  $H$  és una *isotopia*; és a dir,  $H_t$  és un homeomorfisme per a tot  $t$ .
  - (c) Si  $M$  és un tor o un pla projectiu, per a tot disc tancat  $D \subset M$  existeix algun homeomorfisme  $g: M \rightarrow M$  tal que  $g(D) = D$  i  $g$  inverteix l'orientació a  $\partial D$ .
6. Demostreu que la suma connexa d'una ampolla de Klein i un pla projectiu és homeomorfa a la suma connexa d'un tor i un pla projectiu.
7. Siguin  $X$  i  $Y$  dues superfícies compactes.
  - (a) Calculeu  $\chi(X \# Y)$  en funció de  $\chi(X)$  i  $\chi(Y)$ .
  - (b) Calculeu  $\chi(X \times Y)$  en funció de  $\chi(X)$  i  $\chi(Y)$ .

8. Doneu triangulacions de l'esfera, del tor, del pla projectiu i de l'ampolla de Klein.
9. (a) Sigui  $G$  un graf pla i connex amb  $v$  vèrtexs i  $a$  arestes. Demostreu per inducció sobre el nombre d'arestes que si  $\mathbb{R}^2 \setminus G$  té  $c$  components connexes llavors es compleix la fórmula d'Euler:  $v - a + c = 2$ .
- (b) Un graf és *complet* si per cada parell de vèrtexs hi ha una i només una aresta que els connecta. Demostreu que un graf complet amb cinc vèrtexs no és pla, però que un graf complet amb quatre vèrtexs sí que es pla.
10. Demostreu que les superfícies següents són homeomorfes:



11. Sigui  $X$  la superfície amb vora representada en el dibuix, que és homeomorfa al complement de tres discs oberts disjunts en una esfera  $S^2$ . Determineu quantes superfícies diferents (llevat d'homeomorfisme) es poden obtenir unint dues còpies  $X_1$  i  $X_2$  de  $X$  mitjançant un homeomorfisme  $f: \partial X_1 \rightarrow \partial X_2$ , i classifiqueu aquestes superfícies. *Indicació:* Estudieu primer el cas amb dos forats en comptes de tres.



12. Classifiqueu les superfícies representades per les paraules següents:

$$\begin{aligned} & abcdec^{-1}da^{-1}b^{-1}e^{-1} \\ & mnpmqn^{-1}qp^{-1} \\ & abcda^{-1}b^{-1}c^{-1}d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & abcda^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1} \\ & aba^{-1}bcdcd^{-1} \\ & aba^{-1}bcdcd \end{aligned}$$

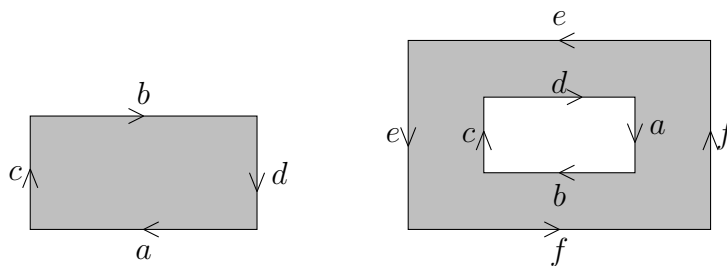
13. Classifiqueu les superfícies representades per les paraules següents per a cada  $n \geq 1$ :

- (i)  $a_1a_2 \dots a_{n-1}a_na_1^{-1}a_2^{-1} \dots a_{n-1}^{-1}a_n^{-1}$ ;
- (ii)  $a_1a_2 \dots a_{n-1}a_na_1^{-1}a_2^{-1} \dots a_{n-1}^{-1}a_n$ .

14. Sigui  $M$  la superfície representada per la paraula següent:

$$ab^{-1}fc^{-1}gh^{-1}a^{-1}dbed^{-1}hcf^{-1}e^{-1}g^{-1}.$$

- (a) Demostreu que  $M$  és orientable i determineu el seu gènere.  
(b) Doneu una presentació del grup fonamental de  $M$ .
15. Considerem l'espai  $X$  que s'obté identificant les arestes de les figures següents de la manera que s'indica. Demostreu que  $X$  és una superfície compacta i classifiqueu-la.



16. Suposem donada una superfície compacta connexa  $M$  i un disc tancat  $D \subset M$  tal que la característica d'Euler de la superfície amb vora  $M \setminus \text{Int}(D)$  és igual a  $-7$ , on  $\text{Int}(D)$  denota l'interior de  $D$ . Tenim prou informació per determinar  $M$  llevat d'homeomorfisme? En cas negatiu, quines són les diferents possibilitats per a  $M$  a partir de la informació donada?
17. Si una superfície  $S$  (no necessàriament connexa) admet una triangulació amb 11 vèrtexs i 24 cares, quina superfície pot ser  $S$ ?
18. Denotem per  $\mathbb{T}$ ,  $\mathbb{K}$  i  $\mathbb{P}$  el tor, l'ampolla de Klein i el pla projectiu, respectivament. Trobeu totes les possibles superfícies compactes  $X$ ,  $Y$  i  $Z$  que satisfan els homeomorfismes següents:
- (i)  $X \# Y \# Z \cong 2\mathbb{K} \# \mathbb{T}$ ,  $X \# Y \cong Z \# 2\mathbb{T}$ ,  $X \# Z \cong Y \# \mathbb{K}$ ;
  - (ii)  $X \# Y \# Z \cong 3\mathbb{K} \# \mathbb{P} \# \mathbb{T}$ ,  $X \# Z \cong Y \# \mathbb{P} \# 2\mathbb{T}$ ,  $Y \# Z \cong 3\mathbb{K} \# 2X$ ;
  - (iii)  $X \# Y \# Z \cong 2\mathbb{K} \# \mathbb{T}$ ,  $X \# 2Z \cong Y \# 2\mathbb{T}$ ,  $Z \# 2\mathbb{T} \cong 2Y \# \mathbb{P}$ ;
  - (iv)  $X \# Y \cong 2\mathbb{T}$ ,  $X \# \mathbb{T} \cong Y \# \mathbb{K}$ .
19. Definim el *rang* d'un grup finitament generat com el mínim nombre de generadors que admet. Demostreu que per a tota superfície compacta i connexa  $M$  i tot punt  $x_0 \in M$  es compleix

$$\chi(M) = 2 - \text{rang } \pi(M, x_0).$$