

Topologia i Geometria Global de Superfícies

Curs 2023–2024

Llista 5: Varietats de Riemann

1. Demostreu que, si considerem a S^2 la mètrica induïda per la mètrica euclidiana de $\mathbb{R}^3$, llavors l'aplicació antipodal $A: S^2 \rightarrow S^2$ és una isometria. Utilitzeu aquest fet per definir una mètrica de Riemann a $\mathbb{R}P^2$ tal que la projecció $S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ sigui una isometria local.
2. Demostreu que si una mètrica de Riemann satisfà $g_{ij} = 0$ per a tot $i \neq j$ en unes certes coordenades, aleshores els símbols de Christoffel en aquestes coordenades satisfan $\Gamma_{ij}^k = 0$ si els tres índexs i, j, k són diferents, i

$$\Gamma_{ij}^i = \Gamma_{ji}^i = \frac{1}{2g_{ii}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x_j} \text{ per a tot } i \text{ i tot } j; \quad \Gamma_{jj}^i = \frac{-1}{2g_{ii}} \frac{\partial g_{jj}}{\partial x_i} \text{ si } i \neq j.$$

3. Sigui M una superfície amb una mètrica de Riemann $g = E(du)^2 + 2F du dv + G(dv)^2$ en una carta local amb coordenades (u, v) . Demostreu que els símbols de Christoffel de la connexió de Levi-Civita satisfan la igualtat següent, on $E_u = \partial E / \partial u$, etc.

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_u & \frac{1}{2}E_v & F_v - \frac{1}{2}G_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u & \frac{1}{2}G_v \end{pmatrix}.$$

4. Parametritzem una carta local del tor a $\mathbb{R}^3$ de radi major R i radi menor r com

$$\begin{cases} x = (R + r \cos u) \cos v \\ y = (R + r \cos u) \sin v \\ z = r \sin u \end{cases}$$

per a $0 < u < 2\pi$, $0 < v < 2\pi$.

- (a) Demostreu que la mètrica g induïda per la mètrica euclidiana de $\mathbb{R}^3$ és

$$g = r^2 (du)^2 + (R + r \cos u)^2 (dv)^2.$$

- (b) Demostreu que els símbols de Christoffel no nuls de la connexió de Levi-Civita són els següents:

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{r}(R + r \cos u) \sin u;$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\frac{r \sin u}{R + r \cos u}.$$

- (c) Escriviu les equacions de les geodèsiques i comproveu que els meridians (v constant) parametritzats amb rapidesa constant $\gamma(t) = (at + b, c)$ són geodèsiques, i també ho són l'equador interior parametritzat com $\gamma(t) = (\pi, at + b)$ i l'equador exterior, que queda fora de la carta local. Els altres paral·lels (u constant diferent de 0 i de π) no són geodèsiques amb cap parametrització.

5. *Semiplà de Poincaré.* Denotem per $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ el semiplà superior. Considerem a $\mathbb{H}^2$ la mètrica g amb coeficients

$$g_{11} = \frac{1}{y^2}; \quad g_{12} = 0; \quad g_{22} = \frac{1}{y^2}.$$

- (i) Demostreu que g és una mètrica de Riemann i que aquesta mètrica determina els mateixos angles que la mètrica euclidiana.
 - (ii) Calculeu els símbols de Christoffel de la connexió de Levi-Civita de la mètrica i escriviu les equacions de les geodèsiques a $\mathbb{H}^2$.
 - (iii) Comproveu que les imatges de les geodèsiques a $\mathbb{H}^2$ són els segments de semirectes verticals i els arcs de circumferències ortogonals a la vora de $\mathbb{H}^2$.
 - (iv) Demostreu que la curvatura de Gauss de $\mathbb{H}^2$ és -1 a tots els punts.
6. *Disc de Beltrami–Poincaré.* Denotem per $\mathbb{D}^2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$ el disc obert de radi 1 centrat a l'origen. Considerem a $\mathbb{D}^2$ la mètrica g amb coeficients

$$g_{11} = \frac{4}{(1 - u^2 - v^2)^2}; \quad g_{12} = 0; \quad g_{22} = \frac{4}{(1 - u^2 - v^2)^2}.$$

- (i) Demostreu que g és una mètrica de Riemann i que aquesta mètrica determina els mateixos angles que la mètrica euclidiana.
- (ii) Calculeu els símbols de Christoffel de la connexió de Levi-Civita de la mètrica i escriviu les equacions de les geodèsiques a $\mathbb{D}^2$.
- (iii) Comproveu que les imatges de les geodèsiques a $\mathbb{D}^2$ són els arcs de circumferències ortogonals a la vora de $\mathbb{D}^2$ i els segments de diàmetres.
- (iv) Demostreu que la curvatura de Gauss de $\mathbb{D}^2$ és -1 a tots els punts.
- (v) Demostreu que la transformació de Cayley $C: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ definida com

$$C(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

és una isometria del semiplà de Poincaré al disc de Beltrami–Poincaré.

7. *Distància al pla hiperbòlic.*

- (a) Siguin z i w dos punts del semiplà $\mathbb{H}^2$. Demostreu que existeix una única geodèsica $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ tal que $\gamma(0) = z$, $\gamma(1) = w$ i que la longitud d'aquesta geodèsica és $\ln(a/b)$ si $z = (0, a)$ i $w = (0, b)$ amb $a > b$ i, en general,

$$l(\gamma) = \ln \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} = 2 \operatorname{arctanh} \frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|}.$$

- (b) Demostreu que l'aplicació $d: \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que assigna a cada parell de punts z i w la longitud de la geodèsica $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ tal que $\gamma(0) = z$ i $\gamma(1) = w$ és una distància.

- (c) Utilitzant la isometria $\mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ de l'exercici 6, demostreu que la distància en el disc de Beltrami–Poincaré és

$$d(z, w) = 2 \operatorname{arctanh} \frac{|z - w|}{|1 - z\bar{w}|}.$$

- (d) Demostreu que la circumferència hiperbòlica de centre $(0, 0)$ i radi r al disc $\mathbb{D}^2$ coincideix amb la circumferència euclidiana de radi $(e^r - 1)/(e^r + 1)$.
- (e) Demostreu que les circumferències hiperbòliques a $\mathbb{D}^2$ i a $\mathbb{H}^2$ coincideixen amb les circumferències euclidianes contingudes, respectivament, a $\mathbb{D}^2$ i a $\mathbb{H}^2$.
8. Demostreu que si una corba γ en una varietat de Riemann és geodèsica, llavors la funció $\varphi(t) = \|\gamma(t)\|$ és constant.
9. En el quadrant positiu $\mathbb{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ considerem la mètrica de Riemann amb coeficients

$$g_{11} = g_{22} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2}, \quad g_{12} = g_{21} = 0.$$

- (a) Demostreu que la recta $x = y$ és la imatge d'una geodèsica a $\mathbb{P}$.
- (b) Calculeu la longitud de la corba $\gamma(t) = (t, t)$ entre els punts $(1, 1)$ i $(2, 2)$.
- (c) Calculeu la curvatura de Gauss de $(\mathbb{P}, g)$.
- (d) Si $\mathbb{H}^2$ és el semiplà de Poincaré, demostreu que l'aplicació $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{H}^2$ donada per $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ és una isometria.
10. Sigui M el subconjunt de $\mathbb{R}^3$ definit per $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$ amb $z > 0$.
- (a) Demostreu que M és una subvarietat diferenciable de $\mathbb{R}^3$ i que si

$$\phi(u, v) = (\cos v \sinh u, \sin v \sinh u, \cosh u), \quad u > 0, 0 < v < 2\pi,$$

aleshores ϕ^{-1} és l'aplicació de coordenades d'una carta local a M .

- (b) Sigui g la restricció a M de la 2-forma $dx^2 + dy^2 - dz^2$ de $\mathbb{R}^3$. Demostreu que g és una mètrica de Riemann a M i que l'expressió local de g en la carta local de l'apartat anterior és $du^2 + (\sinh u)^2 dv^2$.
- (c) Demostreu que M té curvatura de Gauss constant -1 .
11. En el pla $\mathbb{R}^2$ amb l'estructura diferenciable estàndard amb coordenades cartesianes (x, y) considerem una mètrica de Riemann g amb

$$E = G = \frac{1}{1 + x^2}, \quad F = 0.$$

- (a) Calculeu la curvatura de Gauss en cada punt de $\mathbb{R}^2$.
- (b) Demostreu que la longitud d'un segment de recta horitzontal $y = y_0$ entre $x = 0$ i $x = a$ tendeix a ∞ quan $a \rightarrow \infty$. *Indicació:* $\operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

- (c) Demostreu que tanmateix l'àrea de la regió compresa entre les rectes $y = y_0$ i $y = y_1$ és finita per a tot parell de valors $y_0 < y_1$. Trobeu el valor d'aquesta àrea en funció de y_0 i y_1 .
- (d) Trobeu els símbols de Christoffel de la connexió de Levi-Civita de g i escriviu les equacions de les geodèsiques.
- (e) Determineu quines rectes de $\mathbb{R}^2$ són imatges de geodèsiques per a la mètrica g .
- (f) Demostreu que les aplicacions $f(x, y) = (\pm x, \pm y + c)$ són isometries de $\mathbb{R}^2$ amb la mètrica g per a tot $c \in \mathbb{R}$ i qualsevol elecció de signes a $\pm x$ i $\pm y$.
12. (a) Demostreu que l'aplicació $f: [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida per les expressions següents és una immersió:

$$\begin{cases} x = \cos u \cos v + 2 \cos v \\ y = \cos u \sin v + 2 \sin v \\ z = \sin u. \end{cases}$$

- (b) Demostreu que la imatge de f és una subvarietat diferenciable M de $\mathbb{R}^3$.
- (c) Demostreu que M és una superfície compacta i trobeu la seva característica d'Euler.
- (d) Trobeu una base de vectors tangents a M en el punt $(-2, 0, 1)$.
- (e) Demostreu que el camp vectorial següent de $\mathbb{R}^3$ és tangent a M :

$$X = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}.$$

- (f) Demostreu que la mètrica de Riemann induïda a M per la mètrica euclidiana de $\mathbb{R}^3$ és $du^2 + (2 + \cos u)^2 dv^2$ i trobeu l'àrea de M .
13. Demostreu que l'àrea d'un tor de radis R i r amb $r < R$ és igual a $4\pi^2 Rr$.
14. Considerem l'esfera S^2 amb la mètrica induïda per la mètrica euclidiana de $\mathbb{R}^3$.

- (a) Siguin ABC i $A'B'C'$ dos triangles geodèsics amb costats respectius a, b, c i a', b', c' . Demostreu que, si $a = a'$, $b = b'$ i $c = c'$, llavors existeix una única isometria $f: S^2 \rightarrow S^2$ tal que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ i $f(C) = C'$.
- (b) Demostreu que, si Σ és la suma dels angles interiors d'un triangle geodèsic no degenerat a S^2 , llavors $\pi < \Sigma < 3\pi$.
- (c) Demostreu que si un triangle geodèsic a S^2 té costats a, b, c i angles α, β, γ , llavors es compleixen les *lleis trigonomètriques esfèriques*:

$$\begin{aligned} \sin a \cos \beta &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha \\ \sin a \sin \beta &= \sin b \sin \alpha \\ \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha. \end{aligned}$$

- (d) Demostreu que si α, β, γ són nombres positius tals que $\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$ llavors existeix algun triangle geodèsic a S^2 amb angles interiors α, β, γ .

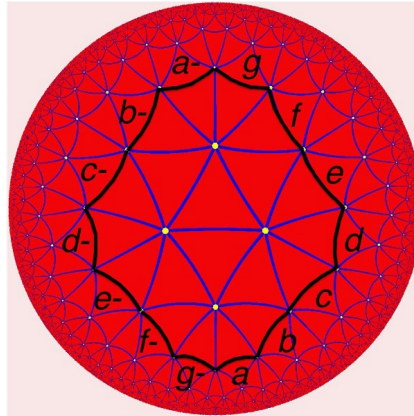
15. Considerem el semiplà de Poincaré $\mathbb{H}^2$ amb la mètrica hiperbòlica.

- (a) Siguin ABC i $A'B'C'$ dos triangles geodèsics amb costats respectius a, b, c i a', b', c' . Demostreu que, si $a = a'$, $b = b'$ i $c = c'$, llavors existeix una única isometria $f: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ tal que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ i $f(C) = C'$.
- (b) Demostreu que, si Σ és la suma dels angles interiors d'un triangle geodèsic no degenerat a $\mathbb{H}^2$, llavors $\Sigma < \pi$.
- (c) Demostreu que si un triangle geodèsic a $\mathbb{H}^2$ té costats a, b, c i angles α, β, γ , llavors es compleixen les *lleis trigonomètriques hiperbòliques*:

$$\begin{aligned}\cosh a &= \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos \alpha \\ \cos \alpha &= -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cosh a.\end{aligned}$$

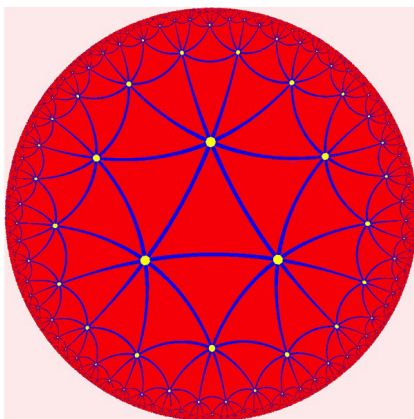
- (d) Demostreu que si α, β, γ són nombres positius tals que $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ llavors existeix algun triangle geodèsic a $\mathbb{H}^2$ amb angles interiors α, β, γ .
 - (e) Siguin ABC i $A'B'C'$ dos triangles geodèsics amb angles respectius α, β, γ i α', β', γ' . Demostreu que, si $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ i $\gamma = \gamma'$, llavors existeix una única isometria $f: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ tal que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ i $f(C) = C'$.
16. Considerem el disc de Beltrami–Poincaré $\mathbb{D}^2$ amb la mètrica hiperbòlica i amb la triangulació infinita per triangles geodèsics representada en la figura següent.

- (a) Classifiquen la superfície S obtinguda identificant els costats del polígon geodèsic següent tal com indiquen les lletres de la figura.



- (b) Formen una triangulació de S els triangles de la figura?
- (c) Demostreu que, si P i Q són els vèrtexs resultants de les identifications de costats indicades a la figura, llavors la mètrica de $\mathbb{D}^2$ induïx una mètrica de Riemann a $S \setminus \{P, Q\}$.
- (d) Calculeu la curvatura de Gauss de $S \setminus \{P, Q\}$.
- (e) Trobeu l'àrea de $S \setminus \{P, Q\}$.
- (f) Trobeu les longituds dels costats dels triangles de S .

17. Considerem la triangulació infinita de $\mathbb{D}^2$ representada en la figura següent:



- (a) Trobeu un polígon geodèsic d'aquesta triangulació i una identificació de costats tal que la superfície S' obtinguda sigui homeomorfa a la superfície S de l'exercici anterior.
 - (b) Demostreu que, si P' i Q' són els vèrtexs resultants de les identifications de costats de l'apartat (b), llavors la mètrica de $\mathbb{D}^2$ indueix una mètrica de Riemann a $S' \setminus \{P', Q'\}$.
 - (c) Calculeu la curvatura de Gauss de $S' \setminus \{P', Q'\}$.
 - (c) Trobeu l'àrea de $S' \setminus \{P', Q'\}$.
 - (e) Demostreu que $S \setminus \{P, Q\}$ i $S' \setminus \{P', Q'\}$ són superfícies de Riemann localment isomètriques, però no isomètriques.
 - (f) Trobeu les longituds dels costats dels triangles de S' .
18. Sigui S una superfície de Riemann compacta i orientable i sigui $K(p)$ la curvatura de Gauss de S en cada punt $p \in S$.
- (a) Demostreu que si $K(p) \geq 0$ per a tot $p \in S$ i existeix un punt p_0 en el qual $K(p_0) > 0$ llavors S és homeomorfa a una esfera.
 - (b) Demostreu que si $K(p) = 0$ per a tot $p \in S$ llavors S és homeomorfa a un tor.
 - (c) Demostreu que si $K(p) \leq 0$ per a tot $p \in S$ i existeix un punt p_0 en el qual $K(p_0) < 0$ llavors S és una superfície de gènere $g > 1$.
19. Sigui S una superfície de Riemann orientable de curvatura constant K i sigui P un polígon geodèsic de n costats contingut en un entorn coordinat de S . Demostreu que, si denotem per Σ la suma dels angles interiors de P , llavors

$$\begin{aligned} \Sigma &> (n-2)\pi && \text{si } K > 0, \\ \Sigma &= (n-2)\pi && \text{si } K = 0, \\ \Sigma &< (n-2)\pi && \text{si } K < 0. \end{aligned}$$