

Topologia

Curs 2022–2023

Llista 2: Espais topològics

1. Sigui $X = \{a, b, c, d\}$ i siguin

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{d\}, \{c, d\}, \{a, b, d\}\},$$

$$\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}\}.$$

- (a) Demostreu que $(X, \mathcal{T}_1)$ és un espai topològic. Quins són els seus tancats?
(b) Demostreu que $(X, \mathcal{T}_2)$ no és un espai topològic. Trobeu el subconjunt més petit $\mathcal{T}_3$ de $\mathcal{P}(X)$ tal que $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_3$ i $(X, \mathcal{T}_3)$ sigui un espai topològic.

2. Considerem els subconjunts de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ següents:

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \mathbb{R}^2, \text{rectes de } \mathbb{R}^2\};$$

$$\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \mathbb{R}^2, \text{boles obertes amb la topologia euclidiana a } \mathbb{R}^2\};$$

$$\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \mathbb{R}^2, \bigcup_{j=0}^n C(r_{1j}, r_{2j}) : r_{1j}, r_{2j} \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\},$$

$$\text{on } C(r_1, r_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r_1 < y < r_2\};$$

$$\mathcal{T}_4 \text{ és com } \mathcal{T}_3, \text{ però amb unions arbitràries (no necessàriament finites);}$$

$$\mathcal{T}_5 = \{\emptyset, \mathbb{R}^2\} \cup \{C_r\}_{r \in \mathbb{R}^+} \text{ on } C_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r\};$$

$$\mathcal{T}_6 = \{\emptyset, \mathbb{R}^2\} \cup \{C_r\}_{r \in \mathbb{Q}^+} \text{ amb } C_r \text{ com abans.}$$

Quins d'aquests subconjunts són topologies a $\mathbb{R}^2$?

3. Decidiu quins dels conjunts següents són oberts o tancats a $\mathbb{R}^2$ amb la topologia euclidiana:

$$(i) \quad \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}; \quad (iii) \quad \{(x, y) : x \leq 6, y \geq 0\};$$

$$(ii) \quad \{(\frac{1}{n}, 0) : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}; \quad (iv) \quad \{(\frac{1}{n}, 0) : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\} \cup \{(0, 0)\}.$$

4. Sigui X un conjunt i sigui $\{\mathcal{T}_i\}_{i \in I}$ una col·lecció de topologies a X . Demostreu que $\mathcal{T} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$ també és una topologia a X .
5. Sigui $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ la família de tots els conjunts tancats i acotats a $\mathbb{R}$ amb la topologia usual. Demostreu que $\mathcal{F} \cup \mathbb{R}$ és el conjunt de tancats d'una única topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ en $\mathbb{R}$. Compareu $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ amb la topologia euclidiana.
6. Sigui X un conjunt qualsevol i sigui $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{X \setminus A : A \text{ és finit}\}$.
- (a) Demostreu que $\mathcal{T}$ és una topologia a X (és la *topologia dels complements finits*).
- (b) Demostreu que si X és finit llavors $\mathcal{T}$ és la topologia discreta, però que si X és infinit llavors $\mathcal{T}$ no prové de cap distància.
7. Considerem a $\mathbb{R}^2$ la topologia euclidiana. Determineu l'interior, l'adherència i la frontera dels conjunts següents:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\};$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{Q}\};$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \neq 0\}; \quad E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\};$$

$$C = A \cup B;$$

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y \leq 1/x\}.$$

8. Sigui A i B subconjunts d'un espai topològic X . Demostreu la igualtat següent si és certa o doneu un contraexemple si és falsa:

$$\overline{A \setminus B} = \overline{A} \setminus \overline{B}.$$

9. Sigui (M, d) un espai mètric i considerem a M la topologia induïda per la distància d . Demostreu que per a tot $A \subset M$ i tot $x \in M$ es compleix que $x \in \overline{A}$ si i només si $d(x, A) = 0$.
10. Sigui $\mathcal{T}$ la topologia a la recta real $\mathbb{R}$ que té com a base la família següent:

$$\mathcal{B} = \{[a, b) \mid a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

- (a) Demostreu que $\mathcal{T}$ és més fina que la topologia euclidiana.
- (b) Determineu l'interior i l'adherència dels subconjunts $[0, \pi]$ i $[\pi, 5)$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.
11. Sigui A un subconjunt d'un espai topològic X . Denotem per ∂A la frontera de A . Demostreu que:
- (a) A° i ∂A són disjunts i $\overline{A} = A^\circ \cup \partial A$;
- (b) $\partial A \subseteq A$ si i només si A és tancat;
- (c) A és obert si i només si $\partial A = \overline{A} \setminus A$ si i només si $\partial A \cap A = \emptyset$;
- (d) $\partial A = \emptyset$ si i només si A és obert i tancat.
- (e) $\partial A = \partial(X \setminus A)$.
- (f) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

Si A és obert, és cert que $A = (\overline{A})^\circ$?

12. Sigui X un espai topològic.
- (a) Demostreu que $\partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B$ per a tot parell de subconjunts A i B de X i doneu un exemple on la inclusió sigui estricta.
- (b) Demostreu que, si $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, llavors $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$.
13. Considerem $\mathbb{R}$ amb la topologia euclidiana.
- (a) Trobeu un subconjunt $A \subset \mathbb{R}$ tal que A , A° i $\overline{A}$ siguin diferents dos a dos.
- (b) Trobeu un subconjunt $A \subset \mathbb{R}$ tal que A , A° , $\overline{A}$ i $\overline{A}^\circ$ siguin diferents dos a dos.
- (c) Demostreu que $\overline{(\overline{A}^\circ)} = \overline{A}^\circ$.
14. Considerem en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ el subconjunt $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \mathbb{R} \setminus A \text{ és numerable}\} \cup \{\emptyset\}$. Demostreu que $\mathcal{T}$ és una topologia a $\mathbb{R}$ i trobeu l'adherència de $[a, b]$ i (a, b) per a $a \leq b$. És $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \mathbb{R} \setminus A \text{ és infinit}\} \cup \{\emptyset\}$ una topologia a $\mathbb{R}$?
15. Sigui X un conjunt i sigui $f: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ una aplicació tal que

- (i) $f(\emptyset) = \emptyset$; (iii) $A \subseteq f(A)$ per a tot $A \subseteq X$;
- (ii) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$; (iv) $f \circ f = f$.

Demostreu que existeix una única topologia en X que verifica $\overline{A} = f(A)$ per a tot $A \subseteq X$. Decidiu quines topologies s'obtenen en els casos $f_1 = \text{Id}$ i

$$f_2(Y) = \begin{cases} X & \text{si } Y \neq \emptyset, \\ \emptyset & \text{si } Y = \emptyset. \end{cases}$$

16. Demostreu els fets següents en un espai topològic X qualsevol:

- (a) Si A i B són densos en X , també ho és $A \cup B$.
- (b) Si A i B són oberts densos en X , també ho és $A \cap B$.

És certa l'afirmació (b) sense la hipòtesi que A i B siguin oberts?

17. Considerem $\mathbb{R}$ amb la topologia euclidiana. Demostreu que si $A \subset \mathbb{R}$ és dens llavors A és infinit. Quins dels següents subconjunts són densos a $\mathbb{R}$?

- (a) El conjunt $\mathbb{Q}$ dels nombres racionals.
- (b) El conjunt dels nombres que, en el seu desenvolupament decimal, contenen el bloc 123456789 en algun lloc.
- (c) El conjunt dels nombres que, en el seu desenvolupament decimal, no contenen el dígit 3.

18. Considerem els subconjunts de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ següents:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_1 &= \{(a, b) : a < b\} \cup \{\emptyset\}; & \mathcal{B}_4 &= \{(-\infty, b)\} \cup \{\emptyset\}; \\ \mathcal{B}_2 &= \{[a, b) : a < b\} \cup \{\emptyset\}; & \mathcal{B}_5 &= \{(a, +\infty)\} \cup \{\emptyset\}. \\ \mathcal{B}_3 &= \{(a, b] : a < b\} \cup \{\emptyset\};\end{aligned}$$

- (a) Demostreu que cada $\mathcal{B}_i$ és base d'alguna topologia en $\mathbb{R}$.
- (b) Compareu entre elles les topologies anteriors.
- (c) Demostreu que $\mathcal{B}_4 \cup \mathcal{B}_5$ genera la mateixa topologia que la base $\mathcal{B}_1$.

19. Sigui X un conjunt i sigui $\mathcal{T}$ la topologia dels complements finits a X .

- (a) Demostreu que tots els entorns a $(X, \mathcal{T})$ són oberts.
- (b) Demostreu que $\{X - \{y\}\}_{y \in X}$ és una subbase d'aquesta topologia.
- (c) Si $X = \mathbb{N}$, trobeu l'interior i l'adherència del conjunt $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$.

20. Sigui X un conjunt i suposem donada per a cada punt $p \in X$ una família no buida $\mathcal{E}_p$ de subconjunts de X amb $p \in A$ per a tot $A \in \mathcal{E}_p$ i amb les propietats següents:

- (a) Si $A \subseteq B$ i $A \in \mathcal{E}_p$, llavors $B \in \mathcal{E}_p$.
- (b) Si A i B pertanyen a $\mathcal{E}_p$, llavors $A \cap B \in \mathcal{E}_p$.
- (c) Tot $A \in \mathcal{E}_p$ conté algun $U \in \mathcal{E}_q$ tal que $A \in \mathcal{E}_q$ per a tot $q \in U$.

Demostreu que existeix una única topologia a X tal que $\mathcal{E}_p$ és el conjunt dels entorns de p per a tot $p \in X$.

21. Doneu una base d'entorns de $(0, 0)$ per a cadascun dels subconjunts de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ de l'exercici 2 que siguin una topologia.

22. Donats els conjunts X i subconjunts $S \subset \mathcal{P}(X)$ següents, decideu si S pot ser base d'alguna topologia en X ; en cas afirmatiu decideu si la topologia resultant satisfà els axiomes de numerabilitat.

- (a) $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $S = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}\} \cup \{\emptyset\}$.

- (b) $X = \mathbb{R}^n$ i $S = \{C_{p,m} : p \in \mathbb{R}^n, m \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$,
on $C_{p,m} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j = p_j \text{ si } 2 \leq j \leq n \text{ i } |x_1 - p_1| < \frac{1}{m}\}$.
- (c) $X = \mathbb{R}^n$ i $S = \{S_q : q \in \mathbb{Q}^n\} \cup \{\emptyset\}$, on $S_q = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j < q_j, j \leq n\}$.

En els apartats (b) i (c), dibuixeu els subconjunts donats per a $n = 2$.

23. La progressió aritmètica associada a dos enters $a, b \in \mathbb{Z}$ amb $b \neq 0$ és el conjunt d'enters

$$a + b\mathbb{Z} = \{a + b\lambda : \lambda \in \mathbb{Z}\}.$$

Per exemple, $3 + 2\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$, $5\mathbb{Z} = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}$.

- (a) Demostreu que la família formada per totes les progressions aritmètiques i el conjunt buit formen una base per a una topologia en $\mathbb{Z}$.
- (b) Demostreu que per a tot nombre primer p el conjunt $p\mathbb{Z}$ és tancat en la topologia anterior.
- (c) Demostreu que hi ha un nombre infinit de nombres primers. (*Indicació:* Demostreu que si hi hagués un nombre finit de primers aleshores el conjunt $\cup_p p\mathbb{Z}$ no podria ser tancat.)