Topologia

Curs 2023–2024

Llista 2: Espais topològics

1. Sigui $X = \{a, b, c, d\}$ i siguin

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{d\}, \{c, d\}, \{a, b, d\}\},$$
$$\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}\}.$$

   (a) Demostreu que $(X, \mathcal{T}_1)$ és un espai topològic. Quins són els seus tancats?

   (b) Demostreu que $(X, \mathcal{T}_2)$ no és un espai topològic. Trobeu el subconjunt més petit $\mathcal{T}_3$ de $\mathcal{P}(X)$ tal que $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_3$ i $(X, \mathcal{T}_3)$ sigui un espai topològic.

2. Considerem els subconjunts de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ següents:

   $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset,\ \mathbb{R}^2,\ \text{rectes de } \mathbb{R}^2\}$;
   $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset,\ \mathbb{R}^2,\ \text{boles obertes amb la topologia euclidiana a } \mathbb{R}^2\}$;
   $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset,\ \mathbb{R}^2,\ \bigcup_{j=0}^{n} C(r_{1j}, r_{2j}) : r_{1j}, r_{2j} \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}\}$,
   on $C(r_1, r_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r_1 < y < r_2\}$;
   $\mathcal{T}_4$ és com $\mathcal{T}_3$, però amb unions arbitràries (no necessàriament finites);
   $\mathcal{T}_5 = \{\emptyset,\ \mathbb{R}^2\} \cup \{C_r\}_{r \in \mathbb{R}^+}$ on $C_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r\}$;
   $\mathcal{T}_6 = \{\emptyset,\ \mathbb{R}^2\} \cup \{C_r\}_{r \in \mathbb{Q}^+}$ amb C_r com abans.

   Quins d'aquests subconjunts són topologies a $\mathbb{R}^2$?

3. Decidiu quins dels conjunts següents són oberts o tancats a $\mathbb{R}^2$ amb la topologia euclidiana:

   (i) $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$;
   (ii) $\{(\frac{1}{n}, 0) : n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1\}$;
   (iii) $\{(x, y) : x \leqslant 6,\ y \geqslant 0\}$;
   (iv) $\{(\frac{1}{n}, 0) : n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1\} \cup \{(0, 0)\}$.

4. Sigui X un conjunt i sigui $\{\mathcal{T}_i\}_{i \in I}$ una col·lecció de topologies a X. Demostreu que $\mathcal{T} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$ també és una topologia a X.

5. Sigui $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ la família de tots els conjunts tancats i acotats a $\mathbb{R}$ amb la topologia usual. Demostreu que $\mathcal{F} \cup \mathbb{R}$ és el conjunt de tancats d'una única topologia $\mathcal{T}_\mathcal{F}$ en $\mathbb{R}$. Compareu $\mathcal{T}_\mathcal{F}$ amb la topologia euclidiana.

6. Sigui X un conjunt qualsevol i sigui $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{X \setminus A : A \text{ és finit}\}$.

   (a) Demostreu que $\mathcal{T}$ és una topologia a X (és la *topologia dels complements finits*).

   (b) Demostreu que si X és finit llavors $\mathcal{T}$ és la topologia discreta, però que si X és infinit llavors $\mathcal{T}$ no prové de cap distància.

7. Considerem a $\mathbb{R}^2$ la topologia euclidiana. Determineu l'interior, l'adherència i la frontera dels conjunts següents:

   $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$;
   $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y \neq 0\}$;
   $C = A \cup B$;
   $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{Q}\}$;
   $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leqslant 1\}$;
   $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0,\ y \leqslant 1/x\}$.

8. Siguin A i B subconjunts d'un espai topològic X. Demostreu la igualtat següent si és certa o doneu un contraexemple si és falsa:
$$\overline{A \smallsetminus B} = \overline{A} \smallsetminus \overline{B}.$$

9. Sigui (M, d) un espai mètric i considerem a M la topologia induïda per la distància d. Demostreu que per a tot $A \subset M$ i tot $x \in M$ es compleix que $x \in \overline{A}$ si i només si $d(x, A) = 0$.

10. Sigui $\mathcal{T}$ la topologia a la recta real $\mathbb{R}$ que té com a base la família següent:
$$\mathcal{B} = \{[a, b) \mid a \in \mathbb{Q},\, b \in \mathbb{R},\, a < b\}.$$
    (a) Demostreu que $\mathcal{T}$ és més fina que la topologia euclidiana.
    (b) Determineu l'interior i l'adherència dels subconjunts $[0, \pi]$ i $[\pi, 5)$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

11. Sigui A un subconjunt d'un espai topològic X. Denotem per ∂A la frontera de A. Demostreu que:
    (a) A° i ∂A són disjunts i $\overline{A} = A^\circ \cup \partial A$;
    (b) $\partial A \subseteq A$ si i només si A és tancat;
    (c) A és obert si i només si $\partial A = \overline{A} \setminus A$ si i només si $\partial A \cap A = \emptyset$;
    (d) $\partial A = \emptyset$ si i només si A és obert i tancat.
    (e) $\partial A = \partial(X \setminus A)$.
    (f) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

    Si A és obert, és cert que $A = (\overline{A})^\circ$?

12. Sigui X un espai topològic.
    (a) Demostreu que $\partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B$ per a tot parell de subconjunts A i B de X i doneu un exemple on la inclusió sigui estricta.
    (b) Demostreu que, si $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, llavors $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$.

13. Considerem $\mathbb{R}$ amb la topologia euclidiana.
    (a) Trobeu un subconjunt $A \subset \mathbb{R}$ tal que A, A° i $\overline{A}$ siguin diferents dos a dos.
    (b) Trobeu un subconjunt $A \subset \mathbb{R}$ tal que A, A°, $\overline{A}$ i $\overline{A^\circ}$ siguin diferents dos a dos.
    (c) Demostreu que $\overline{(\overline{A^\circ})^\circ} = \overline{A^\circ}$.

14. Considerem en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ el subconjunt $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \mathbb{R} \smallsetminus A \text{ és numerable}\} \cup \{\emptyset\}$. Demostreu que $\mathcal{T}$ és una topologia a $\mathbb{R}$ i trobeu l'adherència de $[a, b]$ i (a, b) per a $a \leqslant b$. És $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \mathbb{R} \smallsetminus A \text{ és infinit}\} \cup \{\emptyset\}$ una topologia a $\mathbb{R}$?

15. Sigui X un conjunt i sigui $f\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ una aplicació tal que
    (i) $f(\emptyset) = \emptyset$;
    (ii) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
    (iii) $A \subseteq f(A)$ per a tot $A \subseteq X$;
    (iv) $f \circ f = f$.

    Demostreu que existeix una única topologia en X que verifica $\overline{A} = f(A)$ per a tot $A \subseteq X$. Decidiu quines topologies s'obtenen en els casos $f_1 = \mathrm{Id}$ i
$$f_2(Y) = \begin{cases} X & \text{si } Y \neq \emptyset, \\ \emptyset & \text{si } Y = \emptyset. \end{cases}$$

16. Demostreu els fets següents en un espai topològic X qualsevol:

    (a) Si A i B són densos en X, també ho és $A \cup B$.

    (b) Si A i B són oberts densos en X, també ho és $A \cap B$.

    És certa l'afirmació (b) sense la hipòtesi que A i B siguin oberts?

17. Considerem $\mathbb{R}$ amb la topologia euclidiana. Demostreu que si $A \subset \mathbb{R}$ és dens llavors A és infinit. Quins dels següents subconjunts són densos a $\mathbb{R}$?

    (a) El conjunt $\mathbb{Q}$ dels nombres racionals.

    (b) El conjunt dels nombres que, en el seu desenvolupament decimal, contenen el bloc 123456789 en algun lloc.

    (c) El conjunt dels nombres que, en el seu desenvolupament decimal, no contenen el dígit 3.

18. Considerem els subconjunts de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ següents:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \{(a,b) : a < b\} \cup \{\emptyset\}; & \mathcal{B}_4 &= \{(-\infty, b)\} \cup \{\emptyset\}; \\ \mathcal{B}_2 &= \{[a,b) : a < b\} \cup \{\emptyset\}; & \mathcal{B}_5 &= \{(a, +\infty)\} \cup \{\emptyset\}. \\ \mathcal{B}_3 &= \{(a,b] : a < b\} \cup \{\emptyset\}; \end{aligned}$$

    (a) Demostreu que cada $\mathcal{B}_i$ és base d'alguna topologia en $\mathbb{R}$.

    (b) Compareu entre elles les topologies anteriors.

    (c) Demostreu que $\mathcal{B}_4 \cup \mathcal{B}_5$ genera la mateixa topologia que la base $\mathcal{B}_1$.

19. Sigui X un conjunt i sigui $\mathcal{T}$ la topologia dels complements finits a X.

    (a) Demostreu que tots els entorns a $(X, \mathcal{T})$ són oberts.

    (b) Demostreu que $\{X - \{y\}\}_{y \in X}$ és una subbase d'aquesta topologia.

    (c) Si $X = \mathbb{N}$, trobeu l'interior i l'adherència del conjunt $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$.

20. Sigui X un conjunt i suposem donada per a cada punt $p \in X$ una família no buida $\mathcal{E}_p$ de subconjunts de X amb $p \in A$ per a tot $A \in \mathcal{E}_p$ i amb les propietats següents:

    (a) Si $A \subseteq B$ i $A \in \mathcal{E}_p$, llavors $B \in \mathcal{E}_p$.

    (b) Si A i B pertanyen a $\mathcal{E}_p$, llavors $A \cap B \in \mathcal{E}_p$.

    (c) Tot $A \in \mathcal{E}_p$ conté algun $U \in \mathcal{E}_p$ tal que $A \in \mathcal{E}_q$ per a tot $q \in U$.

    Demostreu que existeix una única topologia a X tal que $\mathcal{E}_p$ és el conjunt dels entorns de p per a tot $p \in X$.

21. Doneu una base d'entorns de $(0,0)$ per a cadascun dels subconjunts de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ de l'exercici 2 que siguin una topologia.

22. Donats els conjunts X i subconjunts $S \subset \mathcal{P}(X)$ següents, decidiu si S pot ser base d'alguna topologia en X; en cas afirmatiu decidiu si la topologia resultant satisfà els axiomes de numerabilitat.

    (a) $X = \{1,2,3,4,5\}$ i $S = \{\{1,2,3\}, \{1,4,5\}, \{3,4,5\}\} \cup \{\emptyset\}$.

(b) $X = \mathbb{R}^n$ i $S = \{C_{p,m} : p \in \mathbb{R}^n,\ m \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$,
on $C_{p,m} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j = p_j \text{ si } 2 \leqslant j \leqslant n \text{ i } |x_1 - p_1| < \frac{1}{m}\}$.

(c) $X = \mathbb{R}^n$ i $S = \{S_q : q \in \mathbb{Q}^n\} \cup \{\emptyset\}$, on $S_q = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j < q_j,\ j \leqslant n\}$.

En els apartats (b) i (c), dibuixeu els subconjunts donats per a $n = 2$.

23. La progressió aritmètica associada a dos enters $a, b \in \mathbb{Z}$ amb $b \neq 0$ és el conjunt d'enters

$$a + b\mathbb{Z} = \{a + b\lambda : \lambda \in \mathbb{Z}\}.$$

Per exemple, $3 + 2\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$, $5\mathbb{Z} = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots\}$.

(a) Demostreu que la família formada per totes les progressions aritmètiques i el conjunt buit formen una base per a una topologia en $\mathbb{Z}$.

(b) Demostreu que per a tot nombre primer p el conjunt $p\mathbb{Z}$ és tancat en la topologia anterior.

(c) Demostreu que hi ha un nombre infinit de nombres primers. (*Indicació*: Demostreu que si hi hagués un nombre finit de primers aleshores el conjunt $\cup_p p\mathbb{Z}$ no podria ser tancat.)