Topologia

Curs 2023–2024

Llista 3: Aplicacions contínues

1. Denotem per $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ el conjunt dels nombres enters no negatius. Sigui $f\colon \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ l'aplicació definida per $f(n) = n+1$ i siguin $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ les topologies donades per

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} &= \{\emptyset, \mathbb{R}, [1,\infty)\} \cup \{[1,x) : x \geqslant 1\},\\
\mathcal{T}_1 &= \{\emptyset, \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \cup \{[0,n] \cap \mathbb{Z} : n \geqslant 0\},\\
\mathcal{T}_2 &= \{\emptyset, \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \cup \{[0,n] \cap \mathbb{Z} : n > 0\}.
\end{aligned}$$

   Estudieu la continuïtat de $f\colon (\mathbb{Z}_{\geq 0}, \mathcal{T}_i) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ per a $i = 1, 2$.

2. Prenem a $\mathbb{R}$ la topologia euclidiana i definim aplicacions $f_1, f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com

$$f_1(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in [n, n+1) \cap \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{Z}, \\ -(n+1) & \text{si } x \in [n, n+1) \cap (\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}),\ n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant a \text{ o bé } x \geqslant b, \\ (x-a)^2(x-b) & \text{si } a < x < b. \end{cases}$$

   Són f_1 i f_2 contínues?

3. Considerem l'interval $[0,2]$ amb la topologia induïda de $\mathbb{R}$ i el conjunt $\mathbb{R}_{\geq 0}$ amb la topologia $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}_{\geq 0}\} \cup \{(a, +\infty) \mid a \geq 0\}$. Definim aplicacions $f\colon [0,2] \to [0,2]$ i $g\colon [0,2] \to (\mathbb{R}_{\geq 0}, \tau)$ com

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1), \\ 3-x & \text{si } x \in [1,2]. \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1], \\ x+1 & \text{si } x \in (1,2]. \end{cases}$$

   Són f i g contínues?

4. Sigui X un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$ i siguin d, d' dues distàncies a X associades a dues normes equivalents (és a dir, que defineixen la mateixa topologia a X). Demostreu les afirmacions següents:

   (a) Totes les boles de la distància d són homeomorfes entre elles.

   (b) Les boles $B_1^d(0)$ i $B_1^{d'}(0)$ són homeomorfes.

   (c) Com a aplicació, demostreu que els interiors d'un quadrat, d'un cercle i d'una el·lipse són homeomorfs entre ells.

5. Sigui (M,d) un espai mètric i τ_d la topologia associada a la distància d. Demostreu que τ_d és la topologia menys fina tal que la funció $f_A\colon (M,d) \to \mathbb{R}$ definida com $f(x) = d(x,A)$ és contínua per a tot $A \subset X$.

6. Demostreu que els espais següents són homeomorfs, establint homeomorfismes explícits:

   (i) $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$;

   (ii) $\mathbb{R} \times S^1$;

(iii) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = z^2,\ z > 0\}$;

(iv) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1,\ -1 < z < 1\}$;

(v) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1\}$;

(vi) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 1\}$.

7. Doneu un exemple de dos espais topològics X i Y que siguin homeomorfs i una aplicació $f\colon X \to Y$ contínua i bijectiva que no sigui un homeomorfisme.

8. Sigui $p \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ un polinomi amb $p \neq 0$ i sigui $P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la funció polinòmica associada. Demostreu que el conjunt $P^{-1}(0)$ és un tancat d'interior buit.

9. Siguin X i Y espais topològics i sigui $f\colon X \to Y$ una aplicació contínua i exhaustiva.

   (a) Demostreu que si D és un subconjunt dens de X, llavors $f(D)$ és dens a Y.

   (b) És cert que si D té interior buit llavors $f(D)$ té interior buit?

10. (a) Siguin X i Y dos espais topològics i sigui W un subconjunt dens de X. Suposem que la topologia de Y prové d'una distància. Demostreu que si dues aplicacions contínues $f, g\colon X \to Y$ satisfan $f(p) = g(p)$ per a tot $p \in W$ llavors $f(x) = g(x)$ per a tot $x \in X$.

    (b) Demostreu que la col·lecció $\{(a,b)\times\mathbb{R} \mid a,b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ és base d'una topologia al pla $\mathbb{R}^2$, on $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.

    (c) Considerem en $\mathbb{R}^2$ la topologia de l'apartat anterior. Demostreu que l'aplicació $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que envia els punts de coordenades racionals al punt $(0,0)$ i la resta de punts al punt $(0,1)$ és contínua.

    (d) Demostreu que l'afirmació de l'apartat (a) és falsa si suprimim la hipòtesi que l'espai Y sigui metritzable.

11. Sigui $(X, \mathcal{T})$ un espai topològic i siguin Y i Z dos conjunts. Donades dues aplicacions $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$, denotem per $\mathcal{T}_f$ la topologia final a l'espai Y respecte a $f\colon (X,\mathcal{T}) \to Y$ i per $\mathcal{T}_{g\circ f}$ la topologia final a Z respecte a $g \circ f\colon (X,\mathcal{T}) \to Z$. Demostreu que $\mathcal{T}_{g\circ f}$ és la topologia final a Z respecte a $g\colon (Y, \mathcal{T}_f) \to Z$.

12. Demostreu que si $f\colon (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{M})$ és un homeomorfisme, llavors $\mathcal{M}$ és la topologia final a Y respecte a f i $\mathcal{T}$ és la topologia inicial a X respecte a f.

13. Justifiqueu les afirmacions següents:

    (a) Si X i Y són espais topològics i $X \times Y$ té la topologia producte, llavors les projeccions de $X \times Y$ a X i a Y són obertes però en general no són tancades.

    (b) Sigui $\sim$ una relació d'equivalència en un espai topològic X. Si posem a $X/\!\sim$ la topologia quocient, llavors la projecció $X \to X/\!\sim$ no és, en general, oberta.

14. Sigui $X = \{1,2,3,4\}$ amb la topologia que té per base $\{\{1\}, \{1,2\}, \{3\}, \{3,4\}\}$ i sigui $Y = \mathbb{R}$ amb la topologia dels complements finits. Considerem $X \times Y$ amb la topologia producte i definim $f\colon X \times Y \to Y$ com $f(x,y) = x + y$. És f contínua? És f una identificació?

15. Considerem a $\mathbb{R}$ la relació d'equivalència definida com $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$. Demostreu que $(\mathbb{R}/\!\sim) \cong S^1$.

16. A $\mathbb{R}^2$ definim les relacions d'equivalència següents:

$$\begin{aligned} (x,y) \approx (x',y') &\iff y = y', \\ (x,y) \sim (x',y') &\iff x^2+y^2 = (x')^2+(y')^2. \end{aligned}$$

Demostreu que $(\mathbb{R}^2/{\approx}) \cong \mathbb{R}$ i que $(\mathbb{R}^2/{\sim}) \cong [0,\infty)$.

17. Definim el *con* i la *suspensió* d'un espai topològic X de la manera següent:

$$CX = (X \times [0,1])/(X \times \{0\}); \qquad \Sigma X = CX/(X \times \{1\}).$$

Demostreu que $CS^1 \cong D^2$ i que $\Sigma S^1 \cong S^2$.

18. Sigui h un homeomorfisme de S^1 en la vora de la cinta de Möbius M. Sigui X el quocient de la unió disjunta $D^2 \amalg M$ per la relació d'equivalència que identifica cada punt $x \in S^1$ amb $h(x)$. Demostreu que X és homeomorf al pla projectiu real $\mathbb{R}P^2$.