Topologia

Curs 2023–2024

Llista 4: Propietats de separació

1. Demostreu que un espai X és de Hausdorff si i només si la diagonal
$$\Delta_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$$
és tancada a $X \times X$ amb la topologia producte.

2. Demostreu que un espai X és de Hausdorff si i només si per a cada $x \in X$ la intersecció de les adherències dels oberts U tals que $x \in U$ és igual a $\{x\}$.

3. Siguin X, Y espais topològics amb Y de Hausdorff i siguin $f, g\colon X \to Y$ dues aplicacions contínues. Demostreu que el conjunt
$$\mathrm{Eq}(f,g) = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$
és tancat a X. Deduïu d'aquest fet que, si f i g coincideixen sobre un conjunt dens a X, llavors $f = g$.

4. Considerem a $\mathbb{R}^2$ el conjunt $L = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ i la topologia determinada per la base d'entorns següent:
   - Els entorns de $p \notin L$ estan generats pels discs oberts $\{D_r\}_{r>0}$.
   - Els entorns de $p \in L$ estan generats pels conjunts $\{p\} \cup (D_r \setminus L)$ amb $r > 0$.

   Demostreu que $\mathbb{R}^2$ amb aquesta topologia satisfà la propietat T_2 però no satisfà la propietat T_3. (*Indicació:* Demostreu que $A = L \setminus \{(0,0)\}$ és tancat però tot entorn de $(0,0)$ intersecta tots els oberts que contenen A.)

5. (a) Demostreu que si per a tot parell de tancats disjunts A i B d'un espai X existeix alguna aplicació contínua $f\colon X \to \mathbb{R}$ tal que $f(a) = 0$ per a tot $a \in A$ i $f(b) = 1$ per a tot $b \in B$, llavors X és normal.

   (b) Deduïu de l'apartat anterior que, si per a tot tancat $Y \subseteq X$ i tota aplicació contínua $g\colon Y \to \mathbb{R}$ existeix alguna extensió contínua $f\colon X \to \mathbb{R}$ (és a dir, una aplicació contínua tal que $f(y) = g(y)$ per a tot $y \in Y$), llavors X és normal.

6. Demostreu que un espai X és regular si i només si per a tot obert U i tot punt $p \in U$ existeix algun obert V tal que $p \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

7. Demostreu que si X i Y són regulars llavors $X \times Y$ també és regular.

8. Sigui $\mathbb{R}_\ell$ el conjunt dels nombres reals amb la *topologia de la convergència per la dreta*, que té per base els intervals semioberts $[a,b)$ amb $a < b$ arbitraris. Aquest espai $\mathbb{R}_\ell$ s'anomena *recta de Sorgenfrey* i l'espai $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$ amb la topologia producte s'anomena *pla de Sorgenfrey*. Considerem el subespai
$$\Delta' = \{(x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell.$$
   (a) Demostreu que $\mathbb{R}_\ell$ és normal i de Fréchet.

   (b) Demostreu que la topologia induïda a Δ' és la topologia discreta.

(c) Demostreu que $A = \Delta' \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$ i $B = \Delta' \setminus A$ són tancats i no es poden recobrir per oberts disjunts. Per tant, $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$ no és un espai normal.

(d) Deduïu que $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$ satisfà la propietat T_3 però no satisfà la T_4.

9. Sigui $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$. Considerem a Γ la topologia que té per base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, on

$$\mathcal{B}_1 = \{B_\varepsilon(x, y) \mid y > 0,\ \varepsilon > 0,\ B_\varepsilon(x, y) \subset \Gamma\},$$

$$\mathcal{B}_2 = \{(x, 0) \cup A \mid A \text{ és una bola oberta tangent a } y = 0 \text{ en } (x, 0)\}.$$

(a) Demostreu que Γ és un espai de Hausdorff.

(b) Demostreu que Γ és un espai regular.

(c) Quina és la topologia induïda en el subespai $L = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$?