

# Topologia

Curs 2023–2024

## Llista 6: Connexió

1. Demostreu que si  $X$  i  $Y$  són espais topològics homeomorfs, llavors per a tot  $x \in X$  existeix  $y \in Y$  tal que  $X \setminus \{x\}$  és homeomorf a  $Y \setminus \{y\}$ . Deduïu-ne que entre els tres espais topològics  $\mathbb{R}$ ,  $S^1$ ,  $\mathbb{R}^2$  no n'hi ha dos que siguin homeomorfs entre ells.
2. Discutiu si són homeomorfs o no els espais topològics següents:
  - (a) Una el·lipse, una hipèrbola i una paràbola.
  - (b)  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus \{(1, 0)\}$ ,  
 $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus \{(1, 0), (-1, 0)\}$ .
3. Sigui  $X$  un espai topològic. Demostreu que  $X$  és connex si i només si tot subespai propi de  $X$  no buit té frontera no buida.
4. Sigui  $X$  un espai topològic. Demostreu que si  $A \subseteq X$  és connex i  $B \subseteq X$  és obert i tancat, aleshores  $A \subseteq B$  o bé  $A \subseteq X \setminus B$ .
5. Sigui  $X$  un espai topològic i siguin  $A, B \subseteq X$ .
  - (a) Demostreu que si  $A$  i  $B$  són connexos i  $A \cap B \neq \emptyset$ , llavors  $A \cup B$  és connex.
  - (b) Demostreu que si  $X$  és connex,  $A$  és connex i  $B \subseteq X \setminus A$  és obert i tancat en  $X \setminus A$ , llavors  $A \cup B$  és connex.
  - (c) Suposem que  $A \cup B$  i  $A \cap B$  són connexos. És cert que  $A$  i  $B$  són necessàriament connexos també?
6. Decidiu raonadament si són connexos i si són arc-connexos els subespais de  $\mathbb{R}^2$  següents:
  - (a)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 < 1\}$ ;
  - (b)  $\{(0, 0)\} \cup \{(1/t)(\cos t, \sin t) \mid t \in (0, \infty)\}$ ;
  - (c)  $\{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(t, \sin(1/t)) \mid 0 < t \leq 1\}$ ;
  - (d)  $\mathbb{Q}^2$ ;
  - (e)  $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2$ ;
  - (f)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{Q}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$ ;
  - (g)  $\{(x, 1/n) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\} \cup \{(n, 0) \mid n \in \mathbb{N}\}$ .
7. Sigui  $X$  un espai topològic i  $A$  un subespai de  $X$ . Suposem donats un punt  $x \in A$  i un punt  $y \notin A$ . Demostreu que la imatge de qualsevol camí  $w: I \rightarrow X$  amb origen  $x$  i final  $y$  conté algun punt de la frontera de  $A$ .
8. Indiqueu raonadament si els espais següents són arc-connexos:
  - (a)  $S^n$ ,  $n \geq 1$ ;
  - (b)  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus S^n$ ,  $n \geq 1$ ;
  - (c)  $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m$ , on  $m < n$  i  $\mathbb{R}^m = \{(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)\} \subset \mathbb{R}^n$ .

9. Una aplicació  $f: X \rightarrow Y$  entre espais topològics  $X, Y$  és *localment constant* si per a tot punt  $x \in X$  existeix un entorn de  $x$  tal que la restricció de  $f$  a aquest entorn és una aplicació constant. Demostreu que  $X$  és connex si i només si tota  $f: X \rightarrow Y$  contínua i localment constant és constant.
10. Considerem en el conjunt  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  la topologia  $\mathcal{T}$  que té per base  $\beta = \{U \cap X \mid U \text{ obert de la topologia euclidiana de } \mathbb{R}^2\} \cup \{(1, 0), (0, 1)\}$ . Comproveu que  $(X, \mathcal{T})$  és de Hausdorff. Demostreu que  $(X, \mathcal{T})$  no és connex. Determineu les seves components connexes i les seves components arc-connexes.
11. Sigui  $X$  un espai topològic compacte, de Hausdorff i connex, i sigui  $A \subseteq X$  un tancat amb  $A \neq \emptyset, X$ . Posem  $U = X \setminus A$ .
  - (a) Demostreu que  $X/A$  és de Hausdorff.
  - (b) Demostreu que  $X/A$  és homeomorf al compactificat d'Alexandroff de  $U$ .
12. Sigui  $X$  un espai topològic i siguin  $A, B \subseteq X$  dos subespais connexos.
  - (a) Demostreu que si  $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$  aleshores  $A \cup B$  és connex.
  - (b) Si  $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$ , és necessàriament  $A \cup B$  connex? És connex  $\overline{A} \cup \overline{B}$ ?
13. Considerem en  $\mathbb{R}$  la topologia  $\mathcal{T}$  que té per base  $\beta = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ .
  - (a) Demostreu que, donats  $c, d \in \mathbb{R}$  amb  $c < d$ , no existeix cap conjunt connex  $J$  tal que  $c, d \in J$ .
  - (b) Descriviu les components connexes i les components arc-connexes de  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ .
14. Donat un conjunt  $X$ , considerem un subconjunt  $A$  amb  $\emptyset \neq A \neq X$  i la col·lecció de subconjunts de  $X$  donada per

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{B \subseteq X \mid A \subseteq B\}.$$

- (a) Demostreu que  $\mathcal{T}$  és una topologia en  $X$  tal que la intersecció arbitrària d'oberts de  $\mathcal{T}$  és un obert de  $\mathcal{T}$ .
- (b) Demostreu que  $\mathcal{T}$  no és de Fréchet.
- (c) Demostreu que  $(X, \mathcal{T})$  és connex.