

Topologia

Curs 2024–2025

Llista 1: Espais mètrics

1. Decidiu quines de les aplicacions $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ següents són distàncies a $\mathbb{R}$:

- (a) $d(x, y) = |e^x - e^y|$;
- (b) $d(x, y) = |x - y|/(x^2 + y^2)$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, i $d(0, 0) = 0$;
- (c) $d(x, y) = (x - y)^2$.

Per a les aplicacions d que siguin distàncies, calculeu $d(0, 1)$ i calculeu la bola $B_1(0)$ de centre 0 i radi 1.

2. Decidiu quines de les aplicacions $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ següents són distàncies a $\mathbb{R}^n$, on denotem $x = (x_1, \dots, x_n)$ i $y = (y_1, \dots, y_n)$:

- (a) $d(x, y) = \min_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$;
- (b) $d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$;
- (c) $d(x, y) = \sum_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$;
- (d) $d(x, y) = \sum_{1 \leq i \leq n} |x_i + y_i|$.

3. Sigui X un conjunt no buit. Donats $x, y \in X$, definim

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Demostreu que d defineix una distància a X (aquesta distància s'anomena *discreta*).

4. Siguin (M_1, d_1) i (M_2, d_2) espais mètrics i sigui $M = M_1 \sqcup M_2$ la unió disjunta. Demostreu que existeix una distància $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfà $d(x, y) = d_1(x, y)$ si $x, y \in M_1$ i $d(x, y) = d_2(x, y)$ si $x, y \in M_2$.
5. Siguin (M_1, d_1) i (M_2, d_2) espais mètrics i sigui $M = M_1 \times M_2$ el producte cartesià. Demostreu que l'aplicació $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ següent és una distància a M :

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}.$$

6. Per a cada nombre primer p , definim una funció $\nu_p: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ de la manera següent: si $a = 0$ llavors $\nu_p(a) = \infty$, i si $a \neq 0$ aleshores

$$\nu_p(a) = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid p^k \text{ divideix } a\}.$$

Llavors definim $d_p: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ com $d_p(a, b) = p^{-\nu_p(a-b)}$, amb el conveni que $p^{-\infty} = 0$.

- (a) Calculeu $d_5(32, 7)$; $d_5(3, 12)$; $d_5(1, 501)$; $d_{13}(232, 154)$; $d_2(5643, 1547)$.
- (b) Demostreu que $\lim_{n \rightarrow \infty} d_p(p^n, 0) = 0$ per a tot primer p .

- (c) Demostreu que $d_p(a, c) \leq \max\{d_p(a, b), d_p(b, c)\}$ per a $a, b, c \in \mathbb{Z}$ arbitraris.
- (d) Demostreu que d_p és una distància a $\mathbb{Z}$ (s'anomena la *distància p-àdica*).
- (e) Calculeu la bola $B_{1/2}(0)$ per a la distància 3-àdica.
- (f) Calculeu $B_r(a)$ per a la distància p -àdica en general, on $a \in \mathbb{Z}$ i $r > 0$.

7. Una *norma* en un espai vectorial real V és una aplicació $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfà:

- (i) $\|v\| \geq 0$ per a tot $v \in V$, i $\|v\| = 0$ si i només si $v = 0$;
- (ii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ per a tot $v \in V$ i $\lambda \in \mathbb{R}$;
- (iii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ per a $u, v \in V$ arbitraris.

Demostreu que si $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$ és una norma aleshores l'aplicació $d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definida per $d(u, v) = \|u - v\|$ és una distància.

8. Sigui (M, d) un espai mètric. Sigui $x, y \in M$ i $r \in \mathbb{R}$ amb $r > d(x, y)$.

- (a) Demostreu que $B_{r-d(x,y)}(x) \subseteq B_r(y)$.
- (b) Enuncieu un anàleg del resultat anterior en el cas que $r < d(x, y)$.

9. Sigui (M, d) un espai mètric. Sigui x_0 un punt de M i sigui $S = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de punts de M tots diferents i tals que $d(a_n, x_0) \rightarrow 0$ quan $n \rightarrow \infty$.

- (a) Demostreu que tota bola de centre x_0 conté algun punt de S diferent de x_0 .
- (b) Demostreu que x_0 és l'únic punt amb aquesta propietat; és a dir, si $x \neq x_0$ llavors existeix una bola de centre x que no conté cap punt de S diferent de x .

10. Considerem les distàncies a $\mathbb{R}^2$ definides de la manera següent:

$$d_{\text{euc}}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

$$d_{\text{max}}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\},$$

i considerem a $\mathbb{R}$ la distància $d(x, y) = |x - y|$.

- (a) Demostreu que les funcions $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definides per $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ i $g(x_1, x_2) = x_1 x_2$ són contínues respecte a la distància d_{max} a $\mathbb{R}^2$. (*Indicació:* Comproveu que, donats $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ i $\varepsilon > 0$, podem escollir $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$ en el cas de f i podem escollir $\delta = \min\{1, \varepsilon/(1 + |p_1| + |p_2|)\}$ en el cas de g .)
- (b) Demostreu que f i g són contínues respecte a la distància d_{euc} a $\mathbb{R}^2$.
- (c) Existeix alguna funció $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que sigui contínua respecte a una de les distàncies $d_{\text{euc}}, d_{\text{max}}$ a $\mathbb{R}^2$ però no ho sigui respecte a l'altra?

11. Sigui (M, d) un espai mètric. Un subconjunt $A \subseteq M$ es diu *acotat* si existeix $k > 0$ tal que $d(x, y) < k$ per a tot $x, y \in A$. Demostreu que un subconjunt $A \subseteq M$ és acotat si i només si A està contingut en una bola.

12. Sigui (M, d) un espai mètric. Definim el *diàmetre* d'un subconjunt $A \subset M$ diferent del buit com

$$\text{diam}(A) = \sup_{x, y \in A} d(x, y).$$

- (a) Quins són els subconjunts de M de diàmetre zero?
 (b) Demostreu que si $A \subseteq B$ aleshores $\text{diam}(A) \leq \text{diam}(B)$.
 (c) Doneu un exemple de subconjunts diferents $A \subset B$ amb $\text{diam}(A) = \text{diam}(B)$.
13. Sigui (M, d) un espai mètric. Definim la distància d'un punt $x \in M$ a un subconjunt $A \subseteq M$ com

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

- (a) Demostreu que l'aplicació $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = d(x, A)$ és contínua.
 (b) Si $x \in M$, demostreu que $d(x, A) = 0$ si i només si tot obert que conté x conté almenys un punt de A . Deduïu d'aquest fet que si A és tancat aleshores $d(x, A) = 0$ si i només si $x \in A$.
14. Sigui (M, d) un espai mètric i siguin A i B dos subconjunts tancats i acotats de M . Definim

$$\rho_d(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A) \right\}.$$

Demostreu que ρ_d és una distància en el conjunt dels subconjunts de M tancats i acotats.

15. Sigui M el conjunt dels polígons plans acotats. Sigui $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ la funció definida com

$$d(A, B) = a(A) + a(B) - 2 \cdot a(A \cap B),$$

on $a(P)$ denota l'àrea d'un polígon P . Demostreu que d és una distància en M .

16. Sigui (M, d) un espai mètric i siguin $A, B \subseteq M$ dos subconjunts tancats i disjunts. Definim una funció $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ per

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

Demostreu que f és contínua i pren valors entre 0 i 1. Trobeu $f^{-1}(0)$ i $f^{-1}(1)$.