Topologia

Curs 2024–2025

Llista 5: Compacitat

1. Sigui $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\} \smallsetminus \{(1, 0)\}$ amb la topologia induïda per la inclusió $X \subseteq \mathbb{R}^2$. Construïu un recobriment obert de X per al qual no existeixi cap subrecobriment finit.

2. Sigui X un espai topològic i sigui $A \subseteq X$ un subespai amb la topologia induïda. Demostreu que A és compacte si i només si per a tota col·lecció $\{U_i\}_{i \in I}$ d'oberts de X tals que $A \subseteq \cup_{i \in I} U_i$ existeix algun conjunt finit $\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq I$ tal que $A \subseteq U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$.

3. Sigui X un espai topològic de Hausdorff i sigui $A \subset X$ un subconjunt compacte de X. Sigui $y \in X \smallsetminus A$. Demostreu que existeixen oberts U i V de X tals que $y \in V$, $A \subseteq U$ i $U \cap V = \emptyset$.

4. Sigui $X = \mathbb{R}[x]$ l'espai de polinomis en una variable amb la topologia associada a la norma següent: per a tot $P = \sum_{k \geqslant 0} a_k x^k$, definim $\|P\| = \sup_{k \geqslant 0} |a_k|$. Demostreu que l'esfera unitat de X no és compacta.

5. Una matriu $n \times n$ amb coeficients a $\mathbb{R}$ es pot veure com a un punt de $\mathbb{R}^{n^2}$: si la matriu és $A = (a_{ij})_{i,j=1\ldots,n}$ el punt de $\mathbb{R}^{n^2}$ és $(a_{11}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nn})$. D'aquesta manera, podem identificar el conjunt de totes les matrius $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ amb $\mathbb{R}^{n^2}$ i dotar-lo de la topologia euclidiana. Decidiu si són o no compactes els subconjunts següents de $\mathbb{R}^{n^2}$:

   (a) $GL(n) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$.

   (b) $SL(n) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$.

   (c) $O(n) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid AA^t = \mathrm{Id}\}$.

6. Sigui $\mathcal{T}$ la topologia euclidiana de $\mathbb{R}$. Definim

$$\mathcal{T}' = \{\emptyset\} \cup \{X \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \smallsetminus X \text{ és compacte en } (\mathbb{R}, \mathcal{T})\}.$$

   (a) Demostreu que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}')$ és un espai topològic i compareu $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$.

   (b) És $(\mathbb{R}, \mathcal{T}')$ un espai de Fréchet? I de Hausdorff?

   (c) És $(\mathbb{R}, \mathcal{T}')$ compacte?

7. Siguin $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ dues topologies en un conjunt X. Demostreu les afirmacions següents:

   (a) Si $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$ i $(X, \mathcal{T}_1)$ és compacte, aleshores també ho és $(X, \mathcal{T}_2)$. Trobeu un exemple que demostri que el recíproc no és cert.

   (b) Si X és compacte i de Hausdorff respecte a $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$, aleshores o bé $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ o bé $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ no són comparables.

8. Siguin $X = [-1, 1]$ i $\mathcal{T} = \{\mathcal{U} \subseteq X \mid 0 \notin \mathcal{U} \text{ o bé } (-1, 1) \subseteq \mathcal{U}\}$.

   (a) Demostreu que $(X, \mathcal{T})$ és un espai topològic. És un espai de Fréchet? És un espai de Hausdorff?

   (b) Demostreu que $(X, \mathcal{T})$ és compacte i no admet cap base numerable.

9. Demostreu que tot espai mètric compacte satisfà el segon axioma de numerabilitat.

10. (a) Demostreu que si $K_1, \ldots, K_n$ són subespais compactes d'un espai topològic X qualsevol llavors $K_1 \cup \cdots \cup K_n$ és compacte, i doneu un exemple d'una família infinita $\{K_i\}_{i\in I}$ de subespais compactes d'un espai X tal que la unió $\cup_{i\in I} K_i$ no sigui un subespai compacte.

    (b) Demostreu que si X és de Hausdorff i $\{K_i\}_{i\in I}$ és qualsevol família de subespais compactes de X llavors la intersecció $\cap_{i\in I} K_i$ és un subespai compacte.

    (c) Sigui X el conjunt $\mathbb{Z}\cup\{\pi, -\pi\}$ amb la topologia que té per oberts $K_1 = \mathbb{Z}\cup\{\pi\}$, $K_2 = \mathbb{Z} \cup \{-\pi\}$ i tots els subconjunts de $\mathbb{Z}$, a més de X. Demostreu que K_1 i K_2 són compactes però $K_1 \cap K_2$ no és compacte.

11. (a) Demostreu que una unió puntual finita $\bigvee_{i=1}^n S^1$ és un espai compacte, però que si el conjunt J és infinit llavors $\bigvee_{j\in J} S^1$ no és compacte.

    (b) Descriviu un subespai $W_n \subset \mathbb{R}^2$ tal que $W_n \cong \bigvee_{i=1}^n S^1$, on n és un enter positiu qualsevol.

    (c) Demostreu que no existeix cap subespai $X \subset \mathbb{R}^2$ tal que $X \cong \bigvee_{j\in\mathbb{N}} S^1$. (*Indicació:* Demostreu que $\bigvee_{j\in\mathbb{N}} S^1$ no satisfà el primer axioma de numerabilitat, mentre que qualsevol subespai de $\mathbb{R}^2$ sí que el satisfà.)

    (d) Doneu una aplicació bijectiva i contínua de $\bigvee_{j\in\mathbb{N}} S^1$ en un subespai de $\mathbb{R}^2$.

12. Un espai mètric A és *complet* si tota successió de Cauchy a A és convergent. Un espai mètric A és *totalment acotat* si per a cada $\epsilon > 0$ existeix una col·lecció finita $B_1, \ldots, B_n$ de boles obertes de radi ϵ tals que $B_1 \cup \cdots \cup B_n = A$. Resoleu els exercicis següents:

    (a) Considerem el conjunt $\mathbb{Q}$ dels nombres racionals amb la topologia induïda per la distància euclidiana de la recta real. Demostreu que $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ és tancat i acotat a $\mathbb{Q}$ però no és compacte.

    (b) Demostreu que si X és un espai mètric i A és un subespai compacte de X, llavors A és complet i totalment acotat. (*Indicació:* Un espai mètric A és compacte si i només si tota successió de punts de A té alguna subsuccessió convergent.)

    (c) Demostreu el recíproc de l'afirmació anterior: si X és un espai mètric i A és un subespai de X complet i totalment acotat, llavors A és compacte. (*Indicació:* Donat un subespai $A \subseteq X$ complet i totalment acotat, si A no és compacte, llavors hi ha algun recobriment obert $\mathcal{U}$ de A que no admet cap subrecobriment finit. Definiu inductivament una successió de boles $B_n = B_{r_n}(p_n)$ a A de radis $r_n = 2^{-n}$ amb $B_{n+1} \cap B_n \neq \emptyset$ per a tot n de manera que B_n no estigui recoberta per cap nombre finit d'oberts de $\mathcal{U}$. La successió (p_n) de centres d'aquestes boles és de Cauchy i per tant té un límit $\ell \in A$. Si $V \in \mathcal{U}$ és tal que $\ell \in V$, aleshores $B_n \subset V$ per a n prou gran, que és una contradicció.)