

# Topologia

Curs 2025–2026

## Llista 2: Espais topològics

1. Sigui  $X = \{a, b, c, d\}$  i siguin

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{d\}, \{c, d\}, \{a, b, d\}\},$$

$$\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}\}.$$

- (a) Demostreu que  $(X, \mathcal{T}_1)$  és un espai topològic. Quins són els seus tancats?  
(b) Demostreu que  $(X, \mathcal{T}_2)$  no és un espai topològic. Trobeu el subconjunt més petit  $\mathcal{T}_3$  de  $\mathcal{P}(X)$  tal que  $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_3$  i  $(X, \mathcal{T}_3)$  sigui un espai topològic.

2. Considerem els subconjunts de  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$  següents:

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \mathbb{R}^2, \text{rectes de } \mathbb{R}^2\};$$

$$\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \mathbb{R}^2, \text{boles obertes amb la topologia euclidiana a } \mathbb{R}^2\};$$

$$\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \mathbb{R}^2, \bigcup_{j=0}^n C(r_{1j}, r_{2j}) : r_{1j}, r_{2j} \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\},$$

$$\text{on } C(r_1, r_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r_1 < y < r_2\};$$

$$\mathcal{T}_4 \text{ és com } \mathcal{T}_3, \text{ però amb unions arbitràries (no necessàriament finites);}$$

$$\mathcal{T}_5 = \{\emptyset, \mathbb{R}^2\} \cup \{C_r\}_{r \in \mathbb{R}^+} \text{ on } C_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r\};$$

$$\mathcal{T}_6 = \{\emptyset, \mathbb{R}^2\} \cup \{C_r\}_{r \in \mathbb{Q}^+} \text{ amb } C_r \text{ com abans.}$$

Quins d'aquests subconjunts són topologies a  $\mathbb{R}^2$ ?

3. Decidiu quins dels conjunts següents són oberts o tancats a  $\mathbb{R}^2$  amb la topologia euclidiana:

(i)  $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\};$

(iii)  $\{(x, y) : x \leq 6, y \geq 0\};$

(ii)  $\{(\frac{1}{n}, 0) : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\};$

(iv)  $\{(\frac{1}{n}, 0) : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\} \cup \{(0, 0)\}.$

4. Sigui  $X$  un conjunt i sigui  $\{\mathcal{T}_i\}_{i \in I}$  una col·lecció de topologies a  $X$ . Demostreu que  $\mathcal{T} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$  també és una topologia a  $X$ .

5. Sigui  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$  la família de tots els conjunts tancats i acotats a  $\mathbb{R}$  amb la topologia usual. Demostreu que  $\mathcal{F} \cup \{\mathbb{R}\}$  és el conjunt de tancats d'una única topologia  $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$  en  $\mathbb{R}$ . Compareu  $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$  amb la topologia euclidiana.

6. Sigui  $X$  un conjunt qualsevol i sigui  $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{X \setminus A : A \text{ és finit}\}.$

(a) Demostreu que  $\mathcal{T}$  és una topologia a  $X$  (és la *topologia dels complements finits*).

(b) Demostreu que si  $X$  és finit llavors  $\mathcal{T}$  és la topologia discreta, però que si  $X$  és infinit llavors  $\mathcal{T}$  no prové de cap distància.

7. Considerem a  $\mathbb{R}^2$  la topologia euclidiana. Determineu l'interior, l'adherència i la frontera dels conjunts següents:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\};$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{Q}\};$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \neq 0\};$$

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\};$$

$$C = A \cup B;$$

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y \leq 1/x\}.$$



16. Demostreu els fets següents en un espai topològic  $X$  qualsevol:

- (a) Si  $A$  i  $B$  són densos en  $X$ , també ho és  $A \cup B$ .
- (b) Si  $A$  i  $B$  són oberts densos en  $X$ , també ho és  $A \cap B$ .

És certa l'afirmació (b) sense la hipòtesi que  $A$  i  $B$  siguin oberts?

17. Considerem  $\mathbb{R}$  amb la topologia euclidiana. Demostreu que si  $A \subset \mathbb{R}$  és dens llavors  $A$  és infinit. Quins dels següents subconjunts són densos a  $\mathbb{R}$ ?

- (a) El conjunt  $\mathbb{Q}$  dels nombres racionals.
- (b) El conjunt dels nombres que, en el seu desenvolupament decimal, contenen el bloc 123456789 en algun lloc.
- (c) El conjunt dels nombres que, en el seu desenvolupament decimal, no contenen el dígit 3.

18. Considerem els subconjunts de  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  següents:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_1 &= \{(a, b) : a < b\} \cup \{\emptyset\}; & \mathcal{B}_4 &= \{(-\infty, b)\} \cup \{\emptyset\}; \\ \mathcal{B}_2 &= \{[a, b) : a < b\} \cup \{\emptyset\}; & \mathcal{B}_5 &= \{(a, +\infty)\} \cup \{\emptyset\}. \\ \mathcal{B}_3 &= \{(a, b] : a < b\} \cup \{\emptyset\};\end{aligned}$$

- (a) Demostreu que cada  $\mathcal{B}_i$  és base d'alguna topologia en  $\mathbb{R}$ .
- (b) Compareu entre elles les topologies anteriors.
- (c) Demostreu que  $\mathcal{B}_4 \cup \mathcal{B}_5$  genera la mateixa topologia que la base  $\mathcal{B}_1$ .

19. Sigui  $X$  un conjunt i sigui  $\mathcal{T}$  la topologia dels complements finits a  $X$ .

- (a) Demostreu que tots els entorns a  $(X, \mathcal{T})$  són oberts.
- (b) Demostreu que  $\{X \setminus \{y\}\}_{y \in X}$  és una subbase d'aquesta topologia.
- (c) Si  $X = \mathbb{N}$ , trobeu l'interior i l'adherència del conjunt  $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$ .

20. Sigui  $X$  un conjunt i suposem donada per a cada punt  $p \in X$  una família no buida  $\mathcal{E}_p$  de subconjunts de  $X$  amb  $p \in A$  per a tot  $A \in \mathcal{E}_p$  i amb les propietats següents:

- (a) Si  $A \subseteq B$  i  $A \in \mathcal{E}_p$ , llavors  $B \in \mathcal{E}_p$ .
- (b) Si  $A$  i  $B$  pertanyen a  $\mathcal{E}_p$ , llavors  $A \cap B \in \mathcal{E}_p$ .
- (c) Tot  $A \in \mathcal{E}_p$  conté algun  $U \in \mathcal{E}_p$  tal que  $A \in \mathcal{E}_q$  per a tot  $q \in U$ .

Demostreu que existeix una única topologia a  $X$  tal que  $\mathcal{E}_p$  és el conjunt dels entorns de  $p$  per a tot  $p \in X$ .

21. Doneu una base d'entorns de  $(0, 0)$  per a cadascun dels subconjunts de  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$  de l'exercici 2 que siguin una topologia.

22. Donats els conjunts  $X$  i subconjunts  $S \subset \mathcal{P}(X)$  següents, decidiu si  $S$  pot ser base d'alguna topologia en  $X$ ; en cas afirmatiu decidiu si la topologia resultant satisfà els axiomes de numerabilitat.

- (a)  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  i  $S = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}\} \cup \{\emptyset\}$ .

- (b)  $X = \mathbb{R}^n$  i  $S = \{C_{p,m} : p \in \mathbb{R}^n, m \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$ ,  
 on  $C_{p,m} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j = p_j \text{ si } 2 \leq j \leq n \text{ i } |x_1 - p_1| < \frac{1}{m}\}$ .
- (c)  $X = \mathbb{R}^n$  i  $S = \{S_q : q \in \mathbb{Q}^n\} \cup \{\emptyset\}$ , on  $S_q = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j < q_j, j \leq n\}$ .

En els apartats (b) i (c), dibuixeu els subconjunts donats per a  $n = 2$ .

23. Una *progressió aritmètica* de nombres enters és un subconjunt de  $\mathbb{Z}$  de la forma següent, on  $b \neq 0$ :

$$a + b\mathbb{Z} = \{a + bn : n \in \mathbb{Z}\}.$$

- (a) Demostreu que la família formada per totes les progressions aritmètiques és base d'una topologia  $\mathcal{T}$  en el conjunt  $\mathbb{Z}$ .
- (b) Demostreu que tota progressió aritmètica  $a + b\mathbb{Z}$  és un subconjunt de  $\mathbb{Z}$  que és obert i tancat alhora a  $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$ .
- (c) Demostreu que, si  $P$  és el conjunt dels nombres primers, llavors  $\bigcup_{p \in P} p\mathbb{Z}$  no és tancat a  $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$ .
- (d) Deduiu del fet anterior que el conjunt dels nombres primers és infinit.