

Topologia

Curs 2025–2026

Llista 3: Aplicacions contínues

1. Denotem per $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ el conjunt dels nombres enters no negatius. Sigui $f: \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ l'aplicació definida per $f(n) = n + 1$ i siguin $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ les topologies donades per

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}, [1, \infty)\} \cup \{[1, x) : x \geq 1\},$$

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \cup \{[0, n] \cap \mathbb{Z} : n \geq 0\},$$

$$\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \cup \{[0, n] \cap \mathbb{Z} : n > 0\}.$$

Estudieu la continuïtat de $f: (\mathbb{Z}_{\geq 0}, \mathcal{T}_i) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ per a $i = 1, 2$.

2. Prenem a $\mathbb{R}$ la topologia euclidiana i definim aplicacions $f_1, f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com

$$f_1(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in [n, n+1) \cap \mathbb{Q}, n \in \mathbb{Z}, \\ -(n+1) & \text{si } x \in [n, n+1) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \text{ o bé } x \geq b, \\ (x-a)^2(x-b) & \text{si } a < x < b. \end{cases}$$

Són f_1 i f_2 contínues?

3. Considerem l'interval $[0, 2]$ amb la topologia induïda de $\mathbb{R}$ i el conjunt $\mathbb{R}_{\geq 0}$ amb la topologia $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}_{\geq 0}\} \cup \{(a, +\infty) \mid a \geq 0\}$. Definim aplicacions $f: [0, 2] \rightarrow [0, 2]$ i $g: [0, 2] \rightarrow (\mathbb{R}_{\geq 0}, \tau)$ com

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1), \\ 3-x & \text{si } x \in [1, 2]. \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1], \\ x+1 & \text{si } x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Són f i g contínues?

4. En la recta real $\mathbb{R}$ amb la distància euclidiana, considerem el subconjunt $F \subset \mathbb{R}$ format pels nombres reals amb part decimal finita; és a dir, $x \in F$ si i només si $x - [x]$ s'expressa amb un nombre finit de dígits, on $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$.

(a) És F obert a $\mathbb{R}$? És F tancat a $\mathbb{R}$?

(b) Definim una aplicació $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ per $f(x) = 0$ si $x \notin F$ i $f(x) = 10^{-k}$ si la part decimal de x té k dígits decimals (en particular, $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Z}$). Demostreu que, donat $p \in \mathbb{R}$, l'aplicació f és contínua a p si i només si $p \notin F$.

5. Sigui X un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$ i siguin d, d' dues distàncies a X associades a dues normes equivalents (és a dir, que defineixen la mateixa topologia a X). Demostreu les afirmacions següents:

(a) Totes les boles de la distància d són homeomorfs entre elles.

(b) Les boles $B_1^d(0)$ i $B_1^{d'}(0)$ són homeomorfs.

(c) Com a aplicació, demostreu que els interiors d'un quadrat, d'un cercle i d'una el·lipse són homeomorfs entre ells.

6. Sigui (M, d) un espai mètric i $\mathcal{T}_d$ la topologia associada a la distància d . Demostreu que $\mathcal{T}_d$ és la topologia menys fina tal que la funció $f_A: (M, d) \rightarrow \mathbb{R}$ definida com $f(x) = d(x, A)$ és contínua per a tot $A \subset X$.
7. Demostreu que els espais següents són homeomorfs, establint homeomorfismes explícits:
 - (i) $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$;
 - (ii) $\mathbb{R} \times S^1$;
 - (iii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$;
 - (iv) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, -1 < z < 1\}$;
 - (v) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$;
 - (vi) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$.
8. Doneu un exemple de dos espais topològics X i Y que siguin homeomorfs i una aplicació $f: X \rightarrow Y$ contínua i bijectiva que no sigui un homeomorfisme.
9. Els subespais de $\mathbb{R}^2$ que es consideren en aquest exercici tenen la topologia induïda per la topologia euclidiana a $\mathbb{R}^2$. Denotem

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}, \quad S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y = 0\}.$$

- (a) Demostreu que l'aplicació de canvi de coordenades polars a coordenades cartesianes $f: (0, \infty) \times (0, \pi) \rightarrow H$, definida com $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, és un homeomorfisme.
- (b) Considerem l'aplicació $g: H \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus S$ definida com $g(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.
 - (i) Demostreu que $g(f(r, \theta)) = f(r^2, 2\theta)$ i que g és un homeomorfisme.
 - (ii) Demostreu que g s'estén a una aplicació bijectiva i contínua $h: H \cup S \rightarrow \mathbb{R}^2$, però que h no és un homeomorfisme.
10. Sigui $p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ un polinomi amb $p \neq 0$ i sigui $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la funció polinòmica associada. Demostreu que el conjunt $P^{-1}(0)$ és un tancat d'interior buit.
11. Siguin X i Y espais topològics i sigui $f: X \rightarrow Y$ una aplicació contínua i exhaustiva.
 - (a) Demostreu que si D és un subconjunt dens de X , llavors $f(D)$ és dens a Y .
 - (b) És cert que si D té interior buit llavors $f(D)$ té interior buit?
12. (a) Siguin X i Y dos espais topològics i sigui W un subconjunt dens de X . Suposem que la topologia de Y prové d'una distància. Demostreu que si dues aplicacions contínues $f, g: X \rightarrow Y$ satisfan $f(p) = g(p)$ per a tot $p \in W$ llavors $f(x) = g(x)$ per a tot $x \in X$.
 - (b) Demostreu que la col·lecció $\{(a, b) \times \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ és base d'una topologia al pla $\mathbb{R}^2$, on $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.
 - (c) Considerem en $\mathbb{R}^2$ la topologia de l'apartat anterior. Demostreu que l'aplicació $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que envia els punts de coordenades racionals al punt $(0, 0)$ i la resta de punts al punt $(0, 1)$ és contínua.
 - (d) Demostreu que l'afirmació de l'apartat (a) és falsa si suprimim la hipòtesi que l'espai Y sigui metrizable.

13. Sigui $(X, \mathcal{T})$ un espai topològic i siguin Y i Z dos conjunts. Donades dues aplicacions $f: X \rightarrow Y$ i $g: Y \rightarrow Z$, denotem per $\mathcal{T}_f$ la topologia final a l'espai Y respecte a $f: (X, \mathcal{T}) \rightarrow Y$ i per $\mathcal{T}_{g \circ f}$ la topologia final a Z respecte a $g \circ f: (X, \mathcal{T}) \rightarrow Z$. Demostreu que $\mathcal{T}_{g \circ f}$ és la topologia final a Z respecte a $g: (Y, \mathcal{T}_f) \rightarrow Z$.
14. Demostreu que si $f: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{M})$ és un homeomorfisme, llavors $\mathcal{M}$ és la topologia final a Y respecte a f i $\mathcal{T}$ és la topologia inicial a X respecte a f .
15. Justifiqueu les afirmacions següents:
- (a) Si X i Y són espais topològics i $X \times Y$ té la topologia producte, llavors les projeccions de $X \times Y$ a X i a Y són obertes però en general no són tancades.
 - (b) Sigui $\sim$ una relació d'equivalència en un espai topològic X . Si posem a $X/\sim$ la topologia quocient, llavors la projecció $X \rightarrow X/\sim$ no és, en general, oberta.
16. Sigui $X = \{1, 2, 3, 4\}$ amb la topologia que té per base $\{\{1\}, \{1, 2\}, \{3\}, \{3, 4\}\}$ i sigui $Y = \mathbb{R}$ amb la topologia dels complements finits. Considerem $X \times Y$ amb la topologia producte i definim $f: X \times Y \rightarrow Y$ com $f(x, y) = x + y$. És f contínua? És f una identificació?
17. A $\mathbb{R}^2$, amb la topologia euclidiana, definim les relacions d'equivalència següents:

$$\begin{aligned}(x, y) &\approx (x', y') &\iff y &= y', \\(x, y) &\sim (x', y') &\iff x^2 + y^2 &= (x')^2 + (y')^2.\end{aligned}$$

Demostreu que $(\mathbb{R}^2/\approx) \cong \mathbb{R}$ i que $(\mathbb{R}^2/\sim) \cong [0, \infty)$.

18. Considerem a $\mathbb{R}$, amb la topologia euclidiana, la relació d'equivalència $x \sim y$ si i només si $y - x \in \mathbb{Z}$.
- (a) Demostreu que el quocient $\mathbb{R}/\sim$ és homeomorf a la circumferència S^1 .
 - (b) Denotem per $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times S^1$ la projecció donada per la relació (a) en cada component. Sigui $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida com $F(x, y) = (ax + by, cx + d)$, on $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Demostreu els fets següents:
 - (i) Si $ad - bc \neq 0$, llavors F és un homeomorfisme.
 - (ii) Si a, b, c, d són nombres enters, existeix una aplicació $f: S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$ contínua tal que $f \circ p = p \circ F$.
 - (iii) Si a, b, c, d són enters tals que $ad - bc = \pm 1$, llavors f és un homeomorfisme.
19. Definim el *con* i la *suspensió* d'un espai topològic X de la manera següent:

$$CX = (X \times [0, 1]) / (X \times \{0\}); \quad \Sigma X = CX / (X \times \{1\}).$$

Demostreu que $CS^1 \cong D^2$ i que $\Sigma S^1 \cong S^2$.

20. Sigui h un homeomorfisme de S^1 en la vora de la cinta de Möbius M . Sigui X el quocient de la unió disjunta $D^2 \amalg M$ per la relació d'equivalència que identifica cada punt $x \in S^1$ amb $h(x)$. Demostreu que X és homeomorf al pla projectiu real $\mathbb{R}P^2$.