

Topologia

Curs 2025–2026

Llista 5: Compacitat

1. Sigui $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus \{(1, 0)\}$ amb la topologia induïda per la inclusió $X \subseteq \mathbb{R}^2$. Construïu un recobriment obert de X per al qual no existeixi cap subrecobriment finit.
2. Sigui X un espai topològic i sigui $A \subseteq X$ un subespai amb la topologia induïda. Demostreu que A és compacte si i només si per a tota col·lecció $\{U_i\}_{i \in I}$ d'oberts de X tals que $A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ existeix algun conjunt finit $\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq I$ tal que $A \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.
3. Sigui X un espai topològic de Hausdorff i sigui $A \subset X$ un subconjunt compacte de X . Sigui $y \in X \setminus A$. Demostreu que existeixen oberts U i V de X tals que $y \in V$, $A \subseteq U$ i $U \cap V = \emptyset$.
4. Sigui $X = \mathbb{R}[x]$ l'espai de polinomis en una variable amb la topologia associada a la norma següent: per a tot $P = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$, definim $\|P\| = \sup_{k \geq 0} |a_k|$. Demostreu que l'esfera unitat de X no és compacta.
5. Una matriu $n \times n$ amb coeficients a $\mathbb{R}$ es pot veure com a un punt de $\mathbb{R}^{n^2}$: si la matriu és $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ el punt de $\mathbb{R}^{n^2}$ és $(a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn})$. D'aquesta manera, podem identificar el conjunt de totes les matrius $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ amb $\mathbb{R}^{n^2}$ i dotar-lo de la topologia euclidiana. Decidiu si són o no compactes els subconjunts següents de $\mathbb{R}^{n^2}$:
 - (a) $GL(n) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$.
 - (b) $SL(n) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$.
 - (c) $O(n) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid AA^t = I\}$, on I és la matriu identitat $n \times n$.
6. Sigui $\mathcal{T}$ la topologia euclidiana de $\mathbb{R}$. Definim
$$\mathcal{T}' = \{\emptyset\} \cup \{X \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus X \text{ és compacte en } (\mathbb{R}, \mathcal{T})\}.$$
 - (a) Demostreu que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}')$ és un espai topològic i compareu $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$.
 - (b) És $(\mathbb{R}, \mathcal{T}')$ un espai de Fréchet? I de Hausdorff?
 - (c) És $(\mathbb{R}, \mathcal{T}')$ compacte?
7. Siguin $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ dues topologies en un conjunt X . Demostreu les afirmacions següents:
 - (a) Si $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$ i $(X, \mathcal{T}_1)$ és compacte, aleshores també ho és $(X, \mathcal{T}_2)$. Trobeu un exemple que demostrï que el recíproc no és cert.
 - (b) Si X és compacte i de Hausdorff respecte a $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$, aleshores o bé $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ o bé $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ no són comparables.
8. Siguin $X = [-1, 1]$ i $\mathcal{T} = \{\mathcal{U} \subseteq X \mid 0 \notin \mathcal{U} \text{ o bé } (-1, 1) \subseteq \mathcal{U}\}$.
 - (a) Demostreu que $(X, \mathcal{T})$ és un espai topològic. És un espai de Fréchet? És un espai de Hausdorff?
 - (b) Demostreu que $(X, \mathcal{T})$ és compacte i no admet cap base numerable.

9. Demostreu que tot espai mètric compacte satisfà el segon axioma de numerabilitat.
10. (a) Demostreu que si $K_1, \dots, K_n$ són subespais compactes d'un espai topològic X qualsevol llavors $K_1 \cup \dots \cup K_n$ és compacte, i doneu un exemple d'una família infinita $\{K_i\}_{i \in I}$ de subespais compactes d'un espai X tal que la unió $\cup_{i \in I} K_i$ no sigui un subespai compacte.
- (b) Demostreu que si X és de Hausdorff i $\{K_i\}_{i \in I}$ és qualsevol família de subespais compactes de X llavors la intersecció $\cap_{i \in I} K_i$ és un subespai compacte.
- (c) Sigui X el conjunt $\mathbb{Z} \cup \{\pi, -\pi\}$ amb la topologia que té per oberts $K_1 = \mathbb{Z} \cup \{\pi\}$, $K_2 = \mathbb{Z} \cup \{-\pi\}$ i tots els subconjunts de $\mathbb{Z}$, a més de X . Demostreu que K_1 i K_2 són compactes però $K_1 \cap K_2$ no és compacte.
11. Siguin X i Y espais topològics i siguin $x_0 \in X$ i $y_0 \in Y$. Denotem per $X \vee Y$ el quocient de la unió disjunta $X \sqcup Y$ per la relació d'equivalència que identifica $x_0 \sim y_0$.
 - (a) Demostreu que, si X i Y són espais de Hausdorff, llavors $X \vee Y$ és un espai de Hausdorff.
 - (b) Demostreu que, si X i Y són compactes, llavors $X \vee Y$ és compacte.
12. (a) Demostreu que una unió puntual finita $\bigvee_{i=1}^n S^1$ és un espai compacte, però que si el conjunt J és infinit llavors $\bigvee_{j \in J} S^1$ no és compacte.
- (b) Descriviu un subespai $W_n \subset \mathbb{R}^2$ tal que $W_n \cong \bigvee_{i=1}^n S^1$, on n és un enter positiu qualsevol.
- (c) Demostreu que no existeix cap subespai $X \subset \mathbb{R}^2$ tal que $X \cong \bigvee_{j \in \mathbb{N}} S^1$. (*Indicació:* Demostreu que $\bigvee_{j \in \mathbb{N}} S^1$ no satisfà el primer axioma de numerabilitat, mentre que qualsevol subespai de $\mathbb{R}^2$ sí que el satisfà.)
- (d) Doneu una aplicació bijectiva i contínua de $\bigvee_{j \in \mathbb{N}} S^1$ en un subespai de $\mathbb{R}^2$.
13. Siguin $X_1, \dots, X_n$ espais topològics de Hausdorff localment compactes però no compactes. Denotem per $X_1^* = X_1 \cup \{\infty_1\}, \dots, X_n^* = X_n \cup \{\infty_n\}$ les compactificacions d'Alexandroff respectives d'aquests espais. Demostreu que la compactificació d'Alexandroff de la unió disjunta $X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n$ és homeomorfa al quocient $(X_1^* \sqcup \dots \sqcup X_n^*) / \{\infty_1, \dots, \infty_n\}$.
14. Trobeu el compactificat d'Alexandroff de l'espai $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Demostreu que el compactificat d'Alexandroff de $\mathbb{R} \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$, on $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}$ són punts diferents, és homeomorf a la unió puntual $S^1 \vee \dots \vee S^1$ de $n + 1$ circumferències.
15. Indiqueu raonadament quin és el compactificat d'Alexandroff de $(0, 1)$. Trobeu el compactificat d'Alexandroff de $[0, 1)$ i demostreu que no és homeomorf al de $(0, 1)$.
16. Sigui r una recta de $\mathbb{R}^2$. Demostreu que el compactificat d'Alexandroff de $\mathbb{R}^2 \setminus r$ és homeomorf a $S^2 \vee S^2$.
17. Sigui X un espai topològic, sigui $\mathbb{N}$ el conjunt dels nombres naturals dotat de la topologia discreta i sigui $\widehat{\mathbb{N}}$ el compactificat d'Alexandroff de $\mathbb{N}$. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és una successió a X i x és un punt de X , definim una aplicació $f: \widehat{\mathbb{N}} \rightarrow X$ com $f(n) = x_n$ si $n \in \mathbb{N}$ i $f(\infty) = x$. Demostreu que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeix cap a x si i només si f és contínua.

18. (a) Demostreu que el compactificat d'Alexandroff de la cinta de Möbius oberta (és a dir, sense la vora) és homeomorf al pla projectiu.
- (b) Demostreu que el cilindre obert i la cinta de Möbius oberta no són homeomorfs.
19. Sigui $Y = (-1, 1]$ i $A = (-1, 0) \subseteq Y$, i sigui $X = Y/A$. Per a cada $x \in Y$, denotem per $\bar{x}$ la seva classe d'equivalència. Sigui $*$ la classe d'un element qualsevol de A .
- (a) Demostreu que X no és de Hausdorff.
- (b) Demostreu que X és compacte.
- (c) Sigui $f: X \rightarrow [0, 1]$ donada per $f(*) = 0$ i $f(\bar{x}) = x$ per a tot $x \in Y$. Demostreu que f és contínua.
- (d) Sigui $g: X \rightarrow [0, 1]$ donada per $g(*) = 1$ i $g(\bar{x}) = x$ per a tot $x \in Y$. Demostreu que g no és contínua.
20. Un espai mètric A és *complet* si tota successió de Cauchy a A és convergent. Un espai mètric A és *totalment acotat* si per a cada $\epsilon > 0$ existeix una col·lecció finita $B_1, \dots, B_n$ de boles obertes de radi ϵ tals que $B_1 \cup \dots \cup B_n = A$. Resoleu els exercicis següents:
- (a) Considerem el conjunt $\mathbb{Q}$ dels nombres racionals amb la topologia induïda per la distància euclidiana de la recta real. Demostreu que $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ és tancat i acotat a $\mathbb{Q}$ però no és compacte.
- (b) Demostreu que si X és un espai mètric i A és un subespai compacte de X , llavors A és complet i totalment acotat. (*Indicació:* Un espai mètric A és compacte si i només si tota successió de punts de A té alguna subsuccessió convergent.)
- (c) Demostreu el recíproc de l'afirmació anterior: si X és un espai mètric i A és un subespai de X complet i totalment acotat, llavors A és compacte. (*Indicació:* Donat un subespai $A \subseteq X$ complet i totalment acotat, si A no és compacte, llavors hi ha algun recobriment obert $\mathcal{U}$ de A que no admet cap subrecobriment finit. Definiu inductivament una successió de boles $B_n = B_{r_n}(p_n)$ a A de radis $r_n = 2^{-n}$ amb $B_{n+1} \cap B_n \neq \emptyset$ per a tot n de manera que B_n no estigui recoberta per cap nombre finit d'oberts de $\mathcal{U}$. La successió (p_n) de centres d'aquestes boles és de Cauchy i per tant té un límit $\ell \in A$. Si $V \in \mathcal{U}$ és tal que $\ell \in V$, aleshores $B_n \subset V$ per a n prou gran, que és una contradicció.)