

Topologia

Curs 2025–2026

Llista 6: Connexió

1. Demostreu que si X i Y són espais topològics homeomorfs, llavors per a tot $x \in X$ existeix un $y \in Y$ tal que $X \setminus \{x\}$ és homeomorf a $Y \setminus \{y\}$. Deduïu-ne que entre els tres espais topològics $\mathbb{R}$, S^1 , $\mathbb{R}^2$ no n'hi ha dos que siguin homeomorfs entre ells.
2. Discutiu si són homeomorfs o no els espais topològics següents:
 - (a) Una el·lipse, una hipèrbola i una paràbola.
 - (b) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus \{(1, 0)\}$,
 $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus \{(1, 0), (-1, 0)\}$.
3. Sigui X un espai topològic. Demostreu que X és connex si i només si tot subespai propi de X no buit té frontera no buida.
4. Sigui X un espai topològic. Demostreu que si $A \subseteq X$ és connex i $B \subseteq X$ és obert i tancat, aleshores $A \subseteq B$ o bé $A \subseteq X \setminus B$.
5. Sigui X un espai topològic i siguin $A, B \subseteq X$.
 - (a) Demostreu que si A i B són connexos i $A \cap B \neq \emptyset$, llavors $A \cup B$ és connex.
 - (b) Demostreu que si X és connex, A és connex i $B \subseteq X \setminus A$ és obert i tancat en $X \setminus A$, llavors $A \cup B$ és connex.
 - (c) Suposem que $A \cup B$ i $A \cap B$ són connexos. És cert que A i B són necessàriament connexos?
6. Sigui X un espai topològic i siguin $A, B \subseteq X$ dos oberts tals que $A \cap B$ és connex. Demostreu que, si $A \cup B$ és connex, aleshores A i B són connexos.
7. Decidiu raonadament si són connexos i si són arc-connexos els subespais de $\mathbb{R}^2$ següents:
 - (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 < 1\}$;
 - (b) $\{(0, 0)\} \cup \{(1/t)(\cos t, \sin t) \mid t \in (0, \infty)\}$;
 - (c) $\{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(t, \sin(1/t)) \mid 0 < t \leq 1\}$;
 - (d) $\mathbb{Q}^2$;
 - (e) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2$;
 - (f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{Q}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$;
 - (g) $\{(x, 1/n) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\} \cup \{(n, 0) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
8. Sigui X un espai topològic i A un subespai de X . Suposem donats un punt $x \in A$ i un punt $y \notin A$. Demostreu que la imatge de qualsevol camí $w: I \rightarrow X$ amb origen x i final y conté algun punt de la frontera de A .

9. Indiqueu raonadament si els espais següents són arc-connexos:
- (a) S^n , $n \geq 1$;
 - (b) $\mathbb{R}^{n+1} \setminus S^n$, $n \geq 1$;
 - (c) $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m$, on $m < n$ i $\mathbb{R}^m = \{(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)\} \subset \mathbb{R}^n$.
10. Una aplicació $f: X \rightarrow Y$ entre espais topològics X, Y és *localment constant* si per a tot punt $x \in X$ existeix un entorn de x tal que la restricció de f a aquest entorn és una aplicació constant. Demostreu que X és connex si i només si tota $f: X \rightarrow Y$ contínua i localment constant és constant.
11. Considerem en el conjunt $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ la topologia $\mathcal{T}$ que té per base $\mathcal{B} = \{U \cap X \mid U \text{ obert de la topologia euclidiana de } \mathbb{R}^2\} \cup \{(1, 0), (0, 1)\}$. Comproveu que $(X, \mathcal{T})$ és de Hausdorff. Demostreu que $(X, \mathcal{T})$ no és connex. Determineu les seves components connexes i les seves components arc-connexes.
12. Sigui X un espai topològic compacte, de Hausdorff i connex, i sigui $A \subseteq X$ un tancat tal que $A \neq \emptyset$ i $A \neq X$. Posem $U = X \setminus A$.
- (a) Demostreu que X/A és de Hausdorff.
 - (b) Demostreu que X/A és homeomorf al compactificat d'Alexandroff de U .
13. Sigui X un espai topològic i siguin $A, B \subseteq X$ dos subespais connexos.
- (a) Demostreu que si $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$ aleshores $A \cup B$ és connex.
 - (b) Si $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$, és necessàriament $A \cup B$ connex? És connex $\overline{A} \cup \overline{B}$?
14. Considerem en $\mathbb{R}$ la topologia $\mathcal{T}$ que té per base $\mathcal{B} = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.
- (a) Demostreu que, donats $c, d \in \mathbb{R}$ amb $c < d$, no existeix cap conjunt connex J tal que $c, d \in J$.
 - (b) Descriviu les components connexes i les components arc-connexes de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.
15. Considerem a $\mathbb{R}$, amb la topologia euclidiana, la relació d'equivalència $x \sim y$ si i només si $y - x \in \mathbb{Z}$. Sigui $f: S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$ l'homeomorfisme del tor obtingut passant al quocient l'aplicació $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida com $F(x, y) = (ax + by, cx + dy)$, on $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ satisfan que $ad - bc = 1$.
- (a) Sigui $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\} \subset \mathbb{R}^2$ i sigui $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times S^1$ la projecció. Demostreu que $p(A)$ és un subespai compacte i connex de $S^1 \times S^1$.
 - (b) Per a cada enter positiu k fixat, considerem el subconjunt

$$A_k = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = kx + n/k\}.$$

Demostreu que $p(A_k)$ és compacte i té k components connexes.