

Topologia Algebraica

Curs 2025–2026

Llista 1: Homologia simplicial

Els complexos simplicials que es consideren en aquest full se suposen ordenats i venen donats per les seves cares maximals. Denotem per Δ^n el complex simplicial $(123 \cdots (n+1))$.

1. Calculeu els grups d'homologia dels complexos simplicials següents:
 - (a) K : $(12) (14) (23) (34)$.
 - (b) L : $(125) (145) (235) (345)$.
 - (c) M : $(125) (145) (235) (345) (126) (146) (236) (346)$.
 - (d) N : $(12) (13) (14) (23) (25) (36) (456)$.
2. Calculeu els grups d'homologia de Δ^3 i del seu 1-esquelet i el seu 2-esquelet.
3. (i) Demostreu que els complexos simplicials següents P i T són triangulacions de superfícies compactes i classifiqueu aquestes superfícies:
 P : $(124) (125) (135) (136) (146) (234) (236) (256) (345) (456)$.
 T : $(125) (126) (134) (138) (146) (158) (237) (239) (259)$
 $(267) (347) (389) (457) (459) (469) (578) (678) (689)$.
(ii) Demostreu que $z = (12) - (13) + (23)$ és un cicle però no és una vora en el complex simplicial P , i que $2z$ és una vora a P .
(iii) Demostreu que $H_1(P)$ conté un element no nul d'ordre 2 i que $H_2(P) = 0$.
(iv) Demostreu que $H_2(T) \cong \mathbb{Z}$.
4. Trobeu totes les aplicacions simplicials de Δ^n en ell mateix, per a $n \geq 1$. Quines d'aquestes aplicacions són isomorfismes?
5. Demostreu que no existeix cap aplicació simplicial injectiva del 2-esquelet de Δ^3 al complex simplicial T de l'exercici 3.
6. Sigui X l'espai obtingut identificant les arestes d'un triangle segons la paraula aaa^{-1} . Trobeu una triangulació de X i calculeu-ne la característica d'Euler.
7. Calculeu la característica d'Euler de cadascun dels esquelets de Δ^n .
8. Demostreu que, si un complex simplicial K és unió de dos subcomplexos A i B , llavors $\chi(K) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$.

Exercicis llargs

1. Calculeu (a mà) els grups d'homologia amb coeficients a $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{F}_2$ del complex simplicial P de l'exercici 3 anterior.
2. Calculeu, amb algun programa de la vostra elecció, els grups d'homologia amb coeficients a $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{F}_2$ dels complexos simplicials P i T de l'exercici 3 anterior.
3. Demostreu que, si un complex simplicial K és unió de dos subcomplexos A i B , llavors existeix una successió exacta llarga

$$\cdots \rightarrow H_n(A \cap B) \rightarrow H_n(A) \oplus H_n(B) \rightarrow H_n(K) \rightarrow H_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \cdots$$