

Topologia Algebraica

Curs 2025–2026

Llista 2: Homologia simplicial i complexos de cadenes

1. Demostreu que la fórmula de l'operador vora $\partial(i_0 \dots i_n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k (i_0 \dots \widehat{i_k} \dots i_n)$ manté la seva validesa si $i_0, \dots, i_n$ es canvien d'ordre i també si dos d'ells estan repetits.
2. Sigui K un complex simplicial abstracte ordenat finit.
 - (a) Demostreu que $\text{rang } H_n(K; \mathbb{Z}) = \dim_{\mathbb{Q}} H_n(K; \mathbb{Q})$ per a tot n .
 - (b) Demostreu que $\chi(K) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \text{rang } H_n(K; \mathbb{Z})$.
 - (c) Demostreu que $\chi(K) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dim_{\mathbb{F}} H_n(K; \mathbb{F})$ per a tot cos $\mathbb{F}$.
3. Demostreu que la relació d'homotopia entre morfismes de complexos de cadenes és una relació d'equivalència (és a dir, reflexiva, simètrica i transitiva).
4. Sigui C_* un complex de cadenes de $\mathbb{Z}$ -mòduls. Demostreu, que si C_* és acíclic i C_n és lliure per a tot n , llavors C_* és contràctil. Doneu un exemple d'un complex de cadenes de $\mathbb{Z}$ -mòduls que sigui acíclic però no contràctil.

Exercicis llargs

1. Per a cada $n \geq 1$, considerem les aplicacions *cara* $d_n^i: \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$ per a $i \in \{0, \dots, n\}$ i les aplicacions *degeneració* $s_n^i: \Delta^n \rightarrow \Delta^{n-1}$ per a $i \in \{0, \dots, n-1\}$, totes monòtones respecte a l'ordre $0 < \dots < n$, on l'aplicació d_n^i omet l'índex i i l'aplicació s_n^i repeteix l'índex i . Demostreu les *identitats cosimplicials*:

$$\begin{aligned} d^j d^i &= d^i d^{j-1} & \text{per a } i < j, \\ s^j s^i &= s^i s^{j+1} & \text{per a } i \leq j, \end{aligned} \quad s^j d^i = \begin{cases} d^i s^{j-1} & \text{si } i < j, \\ \text{id} & \text{si } i = j \text{ o bé } i = j + 1, \\ d^{i-1} s^j & \text{si } i > j + 1. \end{cases}$$

2. (*Lema dels cinc*) Considerem un diagrama commutatiu de R -mòduls amb files exactes:

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \xrightarrow{f_1} & M_2 & \xrightarrow{f_2} & M_3 & \xrightarrow{f_3} & M_4 & \xrightarrow{f_4} & M_5 \\ g_1 \downarrow & & g_2 \downarrow & & g_3 \downarrow & & g_4 \downarrow & & g_5 \downarrow \\ M'_1 & \xrightarrow{f'_1} & M'_2 & \xrightarrow{f'_2} & M'_3 & \xrightarrow{f'_3} & M'_4 & \xrightarrow{f'_4} & M'_5 \end{array}$$

- (a) Demostreu que si g_2, g_4 són epimorfismes i g_5 és un monomorfisme, aleshores g_3 és un epimorfisme.
- (b) Demostreu que si g_2, g_4 són monomorfismes i g_1 és un epimorfisme, aleshores g_3 és un monomorfisme.
- (c) Demostreu que si g_1, g_2, g_4, g_5 són isomorfismes, aleshores g_3 és un isomorfisme.