

Topologia Algebraica

Curs 2025–2026

Llista 3: Homologia singular en graus baixos

- Demostreu que, si A és un retracte d'un espai topològic X , llavors $H_n(A)$ és un sumand directe de $H_n(X)$ per a tot n .
 - Demostreu que, si A és un retracte de deformació de X , llavors existeix un complex de cadenes acíclic C_* tal que $S_*(X) = S_*(A) \oplus C_*$.
- Demostreu que, per a tot espai X , el grup $H_0(X)$ és abelià lliure sobre el conjunt $\pi_0(X)$ de components arc-connexes de X .
- Demostreu que, per a tot espai X i tot $n \geq 0$, el grup $\tilde{H}_n(X)$ és el nucli del morfisme $H_n(X) \rightarrow H_n(\{*\})$ induït per l'única aplicació $X \rightarrow \{*\}$.
 - Demostreu que, si X no és buit, llavors $H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$.
- Sigui G un graf finit connex i sigui $A \subseteq G$ un arbre maximal. Demostreu que $H_1(G)$ és un grup abelià lliure sobre el conjunt d'arestes de $G \setminus A$.
 - Demostreu que, si G és un graf finit connex amb n vèrtexs i m arestes, llavors $H_1(G)$ és un grup abelià lliure de rang $m - n + 1$.
 - Calculeu $H_1(X)$ si X és el 1-esquelet de Δ^n per a $n \geq 2$.
- Demostreu que, si M és una superfície compacta connexa sense vora, llavors
$$H_1(M) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{2g} & \text{si } M \text{ és orientable de gènere } g, \\ \mathbb{Z}^{n-1} \oplus \mathbb{Z}/2 & \text{si } M \text{ és una suma connexa de } n \text{ plans projectius.} \end{cases}$$
- Demostreu que, si $f: S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$ és un homeomorfisme, llavors f indueix un automorfisme f_* de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
 - Demostreu que f conserva l'orientació si i només si $\det f_* = 1$.
- Demostreu que, si X i Y són arc-connexos i no buits, llavors $H_1(X \times Y) \cong H_1(X) \oplus H_1(Y)$.

Exercicis llargs

- El *dodecàedre de Poincaré* $\mathbb{D}$ és una 3-varietat que s'obté identificant les cares oposades, fent-hi un gir de $\pi/5$, d'un dodecàedre regular. Demostreu que el grup fonamental de $\mathbb{D}$ no és trivial, però que $H_1(\mathbb{D}) = 0$.
- Demostreu que, si M és una superfície (sense vora) compacta, connexa i no orientable, llavors existeix un homeomorfisme local $f: \hat{M} \rightarrow M$ on $\hat{M}$ és una superfície orientable tal que, per a cada punt $p \in M$, el conjunt $f^{-1}(p)$ està format per dos punts. Demostreu que $\hat{M}$ és única llevat d'homeomorfisme i calculeu el morfisme $f_*: H_1(\hat{M}) \rightarrow H_1(M)$.
Indicació: Considereu en primer lloc el cas en què M és l'ampolla de Klein i $\hat{M}$ és el tor.