

Topologia Algebraica

Curs 2025–2026

Llista 4: Successió exacta de Mayer–Vietoris

1. Demostreu que el morfisme de connexió $\delta_n: H_n(C_*) \rightarrow H_{n-1}(A_*)$ és natural per a tot n respecte a morfismes de successions exactes $0 \rightarrow A_* \rightarrow B_* \rightarrow C_* \rightarrow 0$ de complexos de cadenes.
2. Doneu un contraexemple on la successió de Mayer–Vietoris per a l’homologia singular no sigui exacta per a una unió $X = A \cup B$ on A i B no siguin necessàriament oberts a X .
3. Demostreu que $H_n(S^1 \times \cdots \times S^1) \cong \mathbb{Z}$ per a tot $n \geq 1$.
4. Calculeu els grups d’homologia del pla projectiu $\mathbb{R}P^2$ i de l’espai projectiu $\mathbb{R}P^3$ amb coeficients a $\mathbb{Z}$, a $\mathbb{Q}$ i a $\mathbb{F}_2$.
5. Calculeu els grups d’homologia de l’ampolla de Klein amb coeficients a $\mathbb{Z}$, a $\mathbb{Q}$ i a $\mathbb{F}_2$.
6. (a) Calculeu els grups d’homologia d’una unió puntual $S^n \vee S^m$ on $n \geq 1$ i $m \geq 1$.
(b) Calculeu els grups d’homologia de $S^n \cup \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\}$, on $n \geq 1$.
(c) Calculeu els grups d’homologia de $S^n \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ on $n \geq 2$ i $k \geq 1$.
7. (a) Demostreu que $H_k(X \times S^n) \cong H_{k-n}(X) \oplus H_k(X)$ per a $k \geq 0$ i $n \geq 0$.
(b) Calculeu els grups d’homologia de $S^n \times S^m$ per a $n \geq 1$ i $m \geq 1$.
(c) Calculeu els grups d’homologia de $S^m \times \cdots \times S^m$ per a $m \geq 1$ i $n \geq 1$.
8. El grau d’una aplicació contínua $f: S^n \rightarrow S^n$, on $n \geq 1$, es defineix com el nombre enter $d(f)$ tal que el morfisme $f_*: H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$ és multiplicació per $d(f)$. Demostreu que, si $A: S^n \rightarrow S^n$ és l’aplicació antipodal, llavors $d(A) = (-1)^{n+1}$.

Exercicis llargs

1. Un *CW-complex* és un espai X que és unió d’una família numerable de subespais

$$X^{(0)} \subseteq X^{(1)} \subseteq X^{(2)} \subseteq \cdots \subseteq X^{(n)} \subseteq \cdots$$

on $X^{(0)}$ és un espai discret i $X^{(n)}$ s’obté a partir de $X^{(n-1)}$ adjuntant un conjunt (possiblement buit) de n -cel·les. Demostreu que, si X és un CW-complex, llavors, per a cada $n \geq 1$, el grup $H_n(X)$ està determinat per l’espai $X^{(n-1)}$ i les aplicacions d’adjunció de les cel·les de dimensions n i $n + 1$.

2. (a) Calculeu els grups d’homologia dels espais projectius reals $\mathbb{R}P^n$ per a tot $n \geq 1$ amb coeficients a $\mathbb{Z}$, a $\mathbb{Q}$ i a $\mathbb{F}_2$.
(b) Calculeu els grups d’homologia dels espais projectius complexos $\mathbb{C}P^n$ per a tot $n \geq 1$ amb coeficients a $\mathbb{Z}$.