

Topologia Algebraica

Curs 2025–2026

Llista 5: Homologia relativa

1. Doneu un exemple d'un parell d'espais (X, A) en què A no sigui tancat a X i tal que $H_n(X, A)$ no sigui isomorf a $\tilde{H}_n(X/A)$ per a algun n . Doneu-ne un altre exemple en què A sigui tancat a X però no sigui retracte de deformació fort de cap entorn.
2. Suposem que $A \subseteq B \subseteq X$.
 - (a) Demostreu que $X \setminus B \cong (X/A) \setminus (B/A)$.
 - (b) Demostreu que $H_n(X \setminus A, B \setminus A) \cong H_n((X/A) \setminus \{*\}, (B/A) \setminus \{*\})$ per a tot n .
3. Suposem que $A \subseteq B \subseteq X$.
 - (a) Demostreu que hi ha una successió exacta llarga
$$\cdots \longrightarrow H_n(B, A) \longrightarrow H_n(X, A) \longrightarrow H_n(X, B) \longrightarrow H_{n-1}(B, A) \longrightarrow \cdots$$
 - (b) Demostreu que, si B és un retracte de X , llavors $H_n(X, A) \cong H_n(X, B) \oplus H_n(B, A)$ per a tot n .
4. Calculeu els grups d'homologia del parell (S^n, S^m) per a $n \geq 1$ i $0 \leq m \leq n$.
5. Calculeu els grups d'homologia del parell $(S^n \times S^n, S^n \vee S^n)$ per a $n \geq 1$.
6. Demostreu que, si $1 \leq m \leq n$, llavors $S^n \times S^m$ té els mateixos grups d'homologia que $S^{n+m} \vee S^n \vee S^m$, però que aquests dos espais no són homeomorfs.
7. Calculeu els grups d'homologia del parell $(M, \partial M)$ si M és una cinta de Möbius.
8. Demostreu que, si M és una varietat topològica de dimensió n , llavors es compleix que $H_n(M, M \setminus \{p\}) \cong \mathbb{Z}$ per a tot punt $p \in M$.

Exercicis llargs

1.
 - (a) Definiu què vol dir que dues aplicacions $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ siguin homòtopes.
 - (b) Definiu què vol dir que dos parells (X, A) i (Y, B) siguin homotòpicament equivalents.
 - (c) Demostreu que, si (X, A) i (Y, B) són homotòpicament equivalents, llavors es compleix que $H_n(X, A) \cong H_n(Y, B)$ per a tot n .
2. Sigui M una superfície compacta, connexa i orientable i sigui $A \subseteq M$ un subespai homeomorf a S^1 . Calculeu els grups d'homologia $H_n(M, A)$ discutint els casos possibles.
3. Demostreu que, si M és una varietat diferenciable compacta, llavors els grups d'homologia de M són finitament generats. És necessari suposar que M és diferenciable?