

Topologia Algebraica
Curs 2025–2026
Llista 6: Complexos cel·lulars

1. Demostreu que l'espai topològic subjacent a qualsevol complex simplicial geomètric és un CW-complex regular.
2. Demostreu que tot CW-complex és un espai de Hausdorff localment compacte i localment arc-connex.
3. (a) Demostreu que un CW-complex és compacte si i només si és finit.
(b) Sigui e_λ^n una n -cel·la d'un CW-complex X . Demostreu que l'adherència $\bar{e}_\lambda^n$ només té intersecció no buida amb un nombre finit de cel·les de X .
(c) Demostreu que si X és un CW-complex i $K \subseteq X$ és un subespai compacte, llavors K només té intersecció no buida amb un nombre finit de cel·les de X .
(d) Demostreu que, si $f: K \rightarrow X$ és una aplicació contínua on K és compacte i X és un CW-complex, llavors $f(K) \subseteq X^{(n)}$ per a algun $n \geq 0$.
4. Considerem les *arracades hawaianes* $A = \bigcup_{n \geq 1} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1/n)^2 + y^2 = (1/n)^2\}$ amb la topologia induïda per $\mathbb{R}^2$. Demostreu que A no és un CW-complex.
5. Calculeu els grups d'homologia dels espais següents:

$$S^\infty = \bigcup_{n \geq 0} S^n, \quad \mathbb{R}P^\infty = \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{R}P^n, \quad \mathbb{C}P^\infty = \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{C}P^n, \quad \mathbb{H}P^\infty = \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{H}P^n.$$

6. Calculeu els grups d'homologia (en funció de d) amb coeficients a $\mathbb{Z}$ i al cos $\mathbb{F}_p$, per a tot primer p , de l'espai obtingut adjuntant una cel·la de dimensió $n + 1$ a S^n mitjançant una aplicació contínua $S^n \rightarrow S^n$ de grau $d \geq 1$, on $n \geq 1$.
7. (a) Demostreu que, si $\{A_n \mid n \geq 0\}$ és una successió qualsevol de grups abelians finitament generats, llavors existeix un espai X tal que $H_n(X) \cong A_n$ per a tot n .
(b) Demostreu el mateix resultat sense suposar que els grups A_n són finitament generats.

Exercicis llargs

1. Demostreu que, si X és un CW-complex i A és un subcomplex de X contràctil, llavors es compleix que $X \simeq X/A$.
2. Calculeu els grups d'homologia dels *espais lenticulars* $L(p, q) = S^3/\sim$, on p i q són enters coprimers i fem quocient per la relació $(z, w) \sim (ze^{2\pi i/p}, we^{2\pi i q/p})$, pensant S^3 com el conjunt de parells $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ tals que $|z|^2 + |w|^2 = 1$.
3. (a) Demostreu que $H_1(\bigvee_{n=1}^\infty S^1)$ és numerable.
(b) Demostreu, que si A denota les arracades hawaianes, llavors $H_1(A)$ no és numerable.
(c) Demostreu que A no és homotòpicament equivalent a cap CW-complex.