

# Topologia Algebraica

Curs 2025–2026

## Llista 7: Homologia persistent

1. Demostreu que, si  $P$  és un núvol de punts i  $\varepsilon > 0$ , llavors  $C_\varepsilon(P) \subseteq R_\varepsilon(P) \subseteq C_{\varepsilon\sqrt{2}}(P)$ , on  $C$  denota el complex de Čech i  $R$  denota el complex de Vietoris–Rips.
2. Dibuixeu un codi de barres i corbes de Betti per als mòduls de persistència de Čech i de Vietoris–Rips d'un conjunt de punts de  $\mathbb{R}^2$  format pels vèrtexs d'un hexàgon regular.
3. Demostreu que, si  $P$  és el conjunt de vèrtexs d'un triangle equilàter de costat 1 en un espai mètric  $(E, d)$ , llavors  $1 \leq \min\{\varepsilon > 0 \mid C_\varepsilon(P) \cong \Delta^2\} \leq 2$ . Demostreu que qualsevol valor comprès entre 1 i 2 es dona en algun espai mètric.
4. Dibuixeu un codi de barres i un diagrama de persistència per al mòdul de persistència de Vietoris–Rips del núvol de punts següent a  $\mathbb{R}^2$ :

$$P = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}.$$

5. (a) Demostreu que un morfisme  $f: M \rightarrow N$  de mòduls de persistència és un isomorfisme si i només si  $f_t: M_t \rightarrow N_t$  és un isomorfisme d'espais vectorials per a tot  $t$ .  
(b) Demostreu que, si dos mòduls de persistència de tipus finit són isomorfs, llavors tenen el mateix espectre.
6. Demostreu que, si  $a < b < c$ , hi ha una successió exacta de mòduls de persistència

$$0 \longrightarrow \mathbb{F}[b, c) \longrightarrow \mathbb{F}[a, c) \longrightarrow \mathbb{F}[a, b) \longrightarrow 0$$

que no s'escindeix, malgrat que s'escindeix en cada  $t \in \mathbb{R}$ .

7. Considerem el mòdul de persistència

$$M = \mathbb{F}[0, 2.15) \oplus \mathbb{F}[0, 3.93) \oplus \mathbb{F}[2.07, 3.26) \oplus \mathbb{F}[3.82, 4.03).$$

- (a) Dibuixeu el diagrama de persistència de  $M$ .
  - (b) Calculeu la persistència total i l'entropia de  $M$ .
  - (c) Dibuixeu la successió de nivells de persistència (*landscape*) de  $M$ .
8. Calculeu la distància d'entrellaçament entre els mòduls de persistència següents:

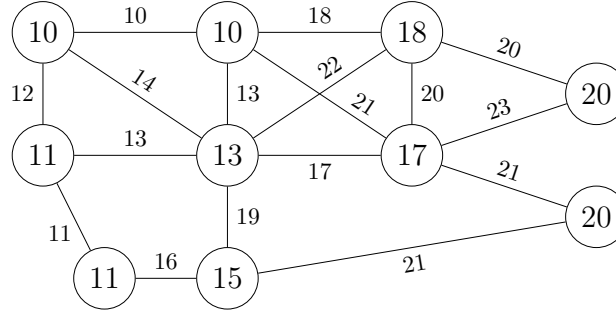
$$M = \mathbb{F}[0, 2.15) \oplus \mathbb{F}[0, 3.93) \oplus \mathbb{F}[2.07, 3.26) \oplus \mathbb{F}[3.82, 4.03),$$

$$N = \mathbb{F}[0, 2.29) \oplus \mathbb{F}[0, 4.11) \oplus \mathbb{F}[2.31, 3.50) \oplus \mathbb{F}[4.65, 4.97).$$

9. Considerem les funcions  $f, g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  donades per

$$f(x) = x^5 - x, \quad g(x) = \frac{1}{5}(x^9 + 7x^5 - 10x).$$

- (a) Calculeu els mòduls de persistència  $M(f)$  i  $M(g)$  en dimensió homològica 0 de les funcions  $f$  i  $g$  respecte a la filtració per altura.
- (b) Demostreu que  $d(M(f), M(g)) < \|f - g\|_\infty$  en  $[-1, 1]$ , on  $d$  és la distància d'entrellaçament.
10. Un graf amb pesos (*weighted graph*) és un graf  $G = (V, E)$  amb funcions  $w_V: V \rightarrow \mathbb{R}$  i  $w_E: E \rightarrow \mathbb{R}$  tals que  $w_V(v) \leq w_E(e)$  si l'aresta  $e$  és incident amb el vèrtex  $v$ . Sigui  $W_k(G)$  el mòdul de persistència en dimensió homològica  $k$  d'un graf amb pesos  $G = (V, E)$  utilitzant  $w_E$  i  $w_V$  conjuntament com a funcions de filtració i considerant els complexos de cliques dels subgrafs de nivell, on una *clica* és un subgraf complet i el *complex de cliques* té una  $k$ -cara per a cada clica formada per  $k + 1$  vèrtexs. Calculeu  $W_k(G)$  per a  $k = 0$  i  $k = 1$  en el graf següent:



11. Dibuixeu diagrames de persistència en dimensions homològiques 0 i 1 per a la imatge digital següent, utilitzant complexos cúbics obtinguts amb la filtració per intensitat de gris, de menor a major. Assigneu el valor 0 a negre i 360 a blanc i després repetiu el càlcul assignant el valor 0 a blanc i el valor 360 a negre.

|     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 180 | 36  | 180 | 144 | 180 | 180 | 180 | 180 |
| 36  | 36  | 36  | 180 | 180 | 216 | 216 | 180 |
| 144 | 36  | 36  | 180 | 180 | 216 | 216 | 180 |
| 180 | 36  | 144 | 36  | 36  | 144 | 36  | 180 |
| 180 | 36  | 36  | 180 | 36  | 36  | 144 | 144 |
| 180 | 144 | 180 | 36  | 36  | 180 | 180 | 180 |
| 180 | 36  | 36  | 144 | 144 | 180 | 180 | 180 |
| 180 | 180 | 180 | 144 | 144 | 144 | 180 | 180 |

## Exercicis llargs

1. Demostreu el *teorema del nervi*: si  $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$  és un recobriment obert d'un espai  $X$  tal que  $U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k}$  és buit o contràctil per a cada subconjunt finit  $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq I$ , llavors la realització geomètrica del nervi de  $\mathcal{U}$  és homotòpicament equivalent a  $X$ .

2. (a) Per a un mòdul de persistència  $M$  indexat per  $\mathbb{R}$  tal que  $M_t$  tingui dimensió finita per a tot  $t \in \mathbb{R}$ , definim l'*invariant de rang* de  $M$  com la funció

$$\text{rk}_M: \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s \leq t\} \longrightarrow \mathbb{N}$$

que assigna a cada  $(s, t)$  el rang de l'aplicació lineal  $\varphi_{s,t}: M_s \rightarrow M_t$ . Demostreu que si dos mòduls de persistència  $M$  i  $M'$  tenen el mateix invariant de rang, llavors  $M$  i  $M'$  són isomorfs.

- (b) Per a un mòdul de persistència biparamètric  $B$  indexat per  $\mathbb{R}^2$  tal que  $B_{(x,y)}$  tingui dimensió finita per a tot  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , definim l'*invariant de rang* de  $M$  com la funció

$$\text{rk}_B: \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x \leq z, y \leq t\} \longrightarrow \mathbb{N}$$

que assigna a cada  $(x, y, z, t)$  el rang de l'aplicació lineal  $\varphi_{(x,y),(z,t)}: B_{(x,y)} \rightarrow B_{(z,t)}$ . Doneu un exemple de dos mòduls de persistència biparamètrics  $B$  i  $B'$  no isomorfs que tinguin el mateix invariant de rang.

3. Donats dos vectors  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , el *coeficient de correlació* entre  $x$  i  $y$  es defineix com

$$\rho(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}},$$

on  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ,  $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ . Dibuixeu un diagrama de persistència de Vietoris–Rips utilitzant la matriu de correlacions  $a_{ij} = 1 - |\rho(x_i, x_j)|$  entre els vectors següents de  $\mathbb{R}^{10}$ :

(0.5488, 0.7151, 0.6027, 0.5448, 0.4236, 0.6458, 0.4375, 0.8910, 0.9636, 0.3834)  
(0.7917, 0.5288, 0.5680, 0.9255, 0.0710, 0.0871, 0.0202, 0.8326, 0.7781, 0.8700)  
(0.9786, 0.7991, 0.4614, 0.7805, 0.1182, 0.6399, 0.1433, 0.9446, 0.5218, 0.4146)  
(0.2645, 0.7742, 0.4561, 0.5684, 0.0187, 0.6176, 0.6120, 0.6169, 0.9437, 0.6818)  
(0.3595, 0.4370, 0.6976, 0.0602, 0.6667, 0.6706, 0.2103, 0.1289, 0.3154, 0.3637)  
(0.5701, 0.4386, 0.9883, 0.1020, 0.2088, 0.1613, 0.6531, 0.2532, 0.4663, 0.2444)  
(0.1589, 0.1103, 0.6563, 0.1381, 0.1965, 0.3687, 0.8209, 0.0971, 0.8379, 0.0960)  
(0.9764, 0.4686, 0.9767, 0.6048, 0.7392, 0.0391, 0.2828, 0.1201, 0.2961, 0.1187)  
(0.3179, 0.4142, 0.0641, 0.6924, 0.5666, 0.2653, 0.5232, 0.0939, 0.5759, 0.9292)  
(0.3185, 0.6674, 0.1317, 0.7163, 0.2894, 0.1831, 0.5865, 0.0201, 0.8289, 0.0046)  
(0.6778, 0.2700, 0.7351, 0.9621, 0.2487, 0.5761, 0.5920, 0.5722, 0.2230, 0.9527)  
(0.4471, 0.8464, 0.6994, 0.2974, 0.8137, 0.3965, 0.8811, 0.5812, 0.8817, 0.6925)  
(0.7252, 0.5013, 0.9560, 0.6439, 0.4238, 0.6063, 0.0191, 0.3015, 0.6601, 0.2900)  
(0.6180, 0.4287, 0.1354, 0.2982, 0.5699, 0.5908, 0.5743, 0.6532, 0.6521, 0.4314)  
(0.8965, 0.3675, 0.4358, 0.8919, 0.8061, 0.7038, 0.1002, 0.9194, 0.7142, 0.9988)  
(0.1494, 0.8681, 0.1624, 0.6155, 0.1238, 0.8480, 0.8073, 0.5691, 0.4071, 0.0691)  
(0.6974, 0.4535, 0.7220, 0.8663, 0.9755, 0.8558, 0.0117, 0.3599, 0.7299, 0.1716)  
(0.5210, 0.0543, 0.1999, 0.0185, 0.7936, 0.2239, 0.3453, 0.9280, 0.7044, 0.0318)  
(0.1646, 0.6214, 0.5772, 0.2378, 0.9342, 0.6139, 0.5356, 0.5899, 0.7301, 0.3119)  
(0.3982, 0.2098, 0.1861, 0.9443, 0.7395, 0.4904, 0.2274, 0.2543, 0.0580, 0.4344).

4. Dibuixeu un diagrama de persistència de Vietoris–Rips i siluetes de persistència amb  $p = 0,5$ ,  $p = 1$  i  $p = 2$  del mòdul de persistència  $M$  en dimensió homològica 1 del núvol de punts següent a  $\mathbb{R}^3$ . Calculeu la persistència total i l'entropia de  $M$ .

|                    |                    |                    |                     |
|--------------------|--------------------|--------------------|---------------------|
| (1.05, 2.00, 2.16) | (2.96, 1.84, 2.09) | (2.49, 2.77, 1.87) | (1.99, 2.42, 2.82)  |
| (1.59, 1.42, 2.66) | (2.27, 1.59, 1.16) | (1.69, 1.24, 2.60) | (2.22, 2.76, 2.53)  |
| (2.50, 2.74, 2.07) | (2.55, 1.59, 1.30) | (1.80, 1.15, 1.47) | (1.31, 2.40, 1.44)  |
| (1.92, 1.06, 1.64) | (2.29, 1.97, 1.01) | (2.25, 2.94, 2.29) | (2.38, 2.57, 2.71)  |
| (1.19, 1.83, 1.55) | (1.53, 2.80, 2.24) | (1.52, 2.82, 1.81) | (1.66, 2.58, 2.66)  |
| (2.05, 1.76, 2.98) | (1.41, 1.96, 1.29) | (1.70, 2.51, 2.81) | (1.79, 1.74, 2.88)  |
| (2.89, 1.84, 2.16) | (2.16, 1.63, 1.08) | (1.62, 1.27, 2.63) | (2.91, 2.27, 2.29)  |
| (1.05, 2.05, 1.59) | (2.60, 1.91, 2.82) | (1.21, 1.68, 2.64) | (1.67, 3.00, 1.80)  |
| (1.76, 1.09, 2.21) | (0.99, 1.66, 2.29) | (2.57, 1.95, 1.17) | (1.31, 1.45, 2.63)  |
| (0.99, 1.90, 1.84) | (2.88, 2.63, 2.05) | (2.13, 1.96, 1.08) | (2.62, 2.76, 2.47)  |
| (2.35, 2.64, 2.69) | (2.52, 2.94, 2.19) | (1.68, 1.25, 2.55) | (1.03, 2.11, 1.74)  |
| (2.49, 2.15, 2.89) | (1.37, 2.46, 1.35) | (2.21, 1.05, 2.40) | (1.20, 1.73, 2.36). |

5. Sigui  $X_1$  el núvol de punts següent:

|                          |                           |                           |
|--------------------------|---------------------------|---------------------------|
| (0.83089090, 0.92139106) | (0.14943596, 0.59539077)  | (−0.42530458, 0.49917853) |
| (1.05135118, 0.69658666) | (1.40450974, 1.63377801)  | (1.20266640, 0.79526767)  |
| (1.40570229, 1.45601583) | (0.81189552, 1.27512527)  | (1.23633497, 1.81306232)  |
| (0.05738789, 1.58270914) | (2.08298134, 0.87369037)  | (0.42736194, 1.51483777)  |
| (1.83601599, 2.31975042) | (2.53595820, 1.29246603)  | (0.86969203, 0.99283119)  |
| (0.47738787, 0.41686889) | (1.01228192, 0.15565445)  | (2.11973316, 1.44747695)  |
| (0.58929427, 1.24252248) | (2.05421121, 2.05534683)  | (1.37592899, 0.96259255)  |
| (1.65529594, 0.98534007) | (0.75427762, 0.75383665)  | (0.99710074, 1.67116645)  |
| (0.82368247, 1.00514813) | (−0.14872117, 0.02096184) | (0.61740303, 1.30389238)  |
| (1.49864810, 0.92041849) | (1.47630053, 0.87510234)  | (1.81213878, 1.91489774), |

i sigui  $X_2$  el núvol de punts següent:

|                        |                         |                         |
|------------------------|-------------------------|-------------------------|
| (1.40754745, 2.647683) | (1.90579751, 3.350476)  | (1.86389493, 3.231760)  |
| (1.24523782, 2.820778) | (2.33118508, 3.963780)  | (2.58430981, 3.650785)  |
| (1.55517672, 3.303610) | (0.60439609, 2.430479)  | (2.20839977, 3.496688)  |
| (1.97133972, 2.321545) | (1.98517772, 2.459581)  | (3.53630008, 3.469574)  |
| (1.39970730, 2.477310) | (2.81785877, 3.541370)  | (2.13849006, 3.351805)  |
| (1.15300714, 3.251407) | (−0.02755078, 1.812042) | (2.78733827, 3.396214)  |
| (2.04172416, 4.218545) | (2.06339041, 3.167594)  | (1.92692528, 2.975792)  |
| (2.00200034, 2.743398) | (0.75285330, 3.240254)  | (3.52340370, 3.839808)  |
| (1.82156736, 3.471864) | (2.15114208, 2.660630)  | (1.95290166, 3.071435)  |
| (1.75719936, 3.097291) | (2.28021529, 2.584600)  | (0.99651700, 2.791795). |

Decidiu si el conjunt següent prové de la mateixa font que  $X_1$  o de la font de  $X_2$ , estudiant les distàncies entre els diagrames de persistència de Vietoris–Rips corresponents.

|                         |                        |                        |
|-------------------------|------------------------|------------------------|
| (2.29024248, 2.526838)  | (2.94471778, 3.495130) | (1.75890949, 2.685264) |
| (2.13586188, 2.792384)  | (1.59348125, 3.347204) | (0.93981079, 2.512890) |
| (2.64627954, 2.317721)  | (2.50426440, 3.819559) | (2.37635825, 2.883139) |
| (2.01157856, 2.221607). |                        |                        |