

GEOMETRIA DIFERENCIAL DE CORBES I SUPERFÍCIES

Problemes curs 2018-2019. Semestre Primavera.

Corbes

Exercici 1. Sigui $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ la corba parametritzada definida per $\alpha(t) = (t^3 - 2t, t^2 - 2)$

- (i) Determineu si els punts $(-1, -1)$, $(4, 2)$ i $(1, 2)$ es troben a la seva traça
- (ii) Trobeu els punts d'intersecció de la traça de α amb els eixos de coordenades.
- (iii) Trobeu una equació de la forma $f(x, y) = 0$ tal que el conjunt de les seves solucions sigui la traça d' α .
- (iv) Determineu les rectes tangents a α que siguin paral·leles a la recta d'equació $2x + y + 3 = 0$.
- (v) Trobeu l'angle que forma la corba α amb la recta d'equació $y = x - 2$ en els punts de tall.

Exercici 2. (*Propietat de reflexió de les còniques.*) Considerem la paràbola d'equació $y^2 = 2px$, amb focus en el punt $F = (\frac{p}{2}, 0)$ (vegeu <http://ca.wikipedia.org/wiki/Paràbola>). Proveu que tot raig paral·lel a l'eix Ox (eix de la paràbola) es reflecteix en la paràbola en un raig que passa pel focus. (En l'el·lipse un raig interior que surt d'un focus es reflecteix passant per l'altre focus, i en la hipèrbola un raig que surt d'un focus es reflecteix com si provingués de l'altre focus.)

Exercici 3. (*Càlcul de la longitud d'arc.*) Determineu quines de les corbes següents són 1-regulars. Trobeu, per cada corba, la longitud d'arc entre els punts indicats.

- (i) $y = \log x$, entre 1 i x .
- (ii) $y = a \cosh \frac{x}{a}$, entre 0 i x (aquesta corba es diu *catenària*).
- (iii) $\alpha(t) = (a(\cos t + t \sin t), a(\sin t - t \cos t))$, entre 0 i $\pi/2$.
- (iv) $\alpha(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$, entre 0 i 2π .
- (v) $\alpha(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$, entre 0 i t .

Exercici 4. (*Canvi de paràmetres.*) Demostreu que les corbes parametritzades

$$\alpha(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta), \quad -\pi < \theta < \pi; \quad \beta(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right), \quad -\infty < t < +\infty,$$

tenen la mateixa traça i trobeu la funció de canvi de paràmetre entre θ i t .

Exercici 5. (*Tractriu.*) Sigui $a > 0$ una constant. S'anomena *tractriu* (vegeu <https://ca.wikipedia.org/wiki/Tractriu>) de paràmetre a la corba que descriu un punt P (situat inicialment en les coordenades $(a, 0)$) que és estirat per un altre punt (situat inicialment a l'origen de coordenades), que es manté a distància constant a del punt P i que es mou seguint l'eix Oy . Proveu que la tractriu és una corba parametritzada 1-regular a tot arreu llevat d'un punt, i trobeu la seva funció longitud d'arc.

Exercici 6. (*Cicloide.*) Un disc de radi a en el pla xy roda uniformement i sense lliscar damunt l'eix x . La corba que descriu un punt P de la circumferència s'anomena *cicloide* (vegeu <https://ca.wikipedia.org/wiki/Cicloide>).

- (i) Proveu que la cicloide es pot parametritzar per $\alpha(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$, on t és l'angle que formen CP i CQ , C és el centre de la circumferència, Q és el punt de contacte de la circumferència amb l'eix Ox i $P = (x, y)$.
- (ii) Trobeu els punts singulars de la parametrització α .
- (iii) Determineu la funció longitud d'arc de la cicloide.

Exercici 7. (*Corba de Viviani.*) La intersecció de l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ amb el cilindre $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ s'anomena *corba de Viviani* (vegeu https://ca.wikipedia.org/wiki/Corba_de_Viviani).

(i)) Proveu que

$$\alpha(u) = \left(a(1 + \cos u), a \sin u, 2a \sin \frac{u}{2} \right), \quad -2\pi \leq u \leq 2\pi,$$

és una parametrització de la corba de Viviani.

- (ii)) Proveu que $(2a, 0, 0)$ és un *punt doble* amb dues tangents diferents.
 (iii)) Feu el canvi de paràmetre

$$t = \tan \frac{u}{4}$$

i proveu que la nova parametrització és:

$$\beta(t) = \left(\frac{2a(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}, \frac{4at(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, \frac{4at}{1+t^2} \right).$$

Exercici 8. (*Gràfiques de funcions.*) Sigui $y = f(x)$ una funció diferenciable. Denotem per

$$\Gamma = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$$

la gràfica de f .

- (i) Proveu que $\alpha(x) = (x, f(x))$ és una corba parametritzada 1-regular i amb traça Γ .
 (ii) Proveu que el pendent de la recta tangent a Γ en un punt $(x, f(x))$ és $f'(x)$.
 (iii) Proveu que la longitud d'arc de Γ entre $(x_0, f(x_0))$ i $(x_1, f(x_1))$ és

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Exercici 9. (*Curvatura de les gràfiques.*) Sigui $y = f(x)$ una funció diferenciable. Proveu que la curvatura de la corba $\gamma(t) = (t, f(t))$ a $t = x$ és

$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{\sqrt{(1 + f'(x)^2)^3}}.$$

- (1) Calculeu la curvatura en els punts d'inflexió de la sinusoide $y = \sin x$.
 (2) Proveu que la curvatura de la paràbola $y = x^2/2p$ assoleix el seu màxim en el vèrtex i tendeix zero en l'infinit.

Exercici 10. (*Càlcul de la curvatura d'una corba plana.*)

- (i) Trobeu la curvatura de $\alpha(t) = (3t^2, 3t - t^3)$, en $t = 1$.
 (ii) Trobeu la curvatura de $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Proveu que la curvatura assoleix els seus extrems en els punts de tall amb els eixos de coordenades (vèrtexos de l'el·lipse).
 (iii) Trobeu la curvatura de $\alpha(t) = (a \cosh t, b \sinh t)$, $t \in \mathbb{R}$. Proveu que la curvatura assoleix el seu màxim en el punt de tall amb l'eix Ox (vèrtex de la hipèrbola), i que tendeix a zero en l'infinit.

Exercici 11. (*Corbes planes en coordenades polars.*) Diem que una corba plana ve donada en coordenades polars quan està expressada en la forma:

$$\alpha(t) = (\rho(t) \cos \theta(t), \rho(t) \sin \theta(t))$$

on $\rho(t)$, $\theta(t)$ són les expressions, en funció del paràmetre t , de la distància de $\alpha(t)$ a l'origen de coordenades (que s'anomena *pol*) i de l'angle que forma el vector $\overrightarrow{O\alpha(t)}$ amb l'eix Ox (que s'anomena *origen d'angles*). Sovint θ és el paràmetre, és a dir, $\theta(t) = t$, i en aquest cas la corba ve determinada per la funció $\rho = \rho(\theta)$.

- (i) Trobeu l'equació en coordenades polars d'una circumferència centrada en l'origen.
 (ii) Trobeu l'equació en coordenades polars d'una circumferència que passa per l'origen.
 (iii) Trobeu l'equació en coordenades cartesianes de la corba $\rho(\theta) = \sin \theta$.

Exercici 12. (*El·lipse.*) Siguin F_1 i F_2 dos punts diferents del pla, $2c = |F_1F_2|$ la distància entre F_1 i F_2 (distància focal), i $a \in \mathbb{R}$ una constant tal que $a > c$. Denotem

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \text{ (semieix menor), } e = \frac{c}{a} < 1 \text{ (excentricitat), } p = \frac{b^2}{a} \text{ (paràmetre focal).}$$

L'el·lipse amb focus F_1 i F_2 i semieix major a és el lloc geomètric dels punts P del pla tals que

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a.$$

- (i) Prenent com a pol F_1 i com a origen d'angles la semirecta amb extrem F_1 i que passa per F_2 , proveu que l'equació de l'el·lipse en coordenades polars és

$$\rho(\theta) = \frac{p}{1 - e \cos \theta}.$$

- (ii) Prenent ara coordenades cartesianes amb origen el punt mig O de F_1F_2 (centre de l'el·lipse) i amb eix Ox en la direcció OF_2 , proveu que l'equació de l'el·lipse pren la forma

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

- (iii) Proveu que

$$\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

és una corba parametritzada regular la traça de la qual és l'el·lipse anterior (el paràmetre t s'anomena *angle d'anomalia excèntrica* del punt $P = \alpha(t)$).

Exercici 13. Demostreu que la traça de la corba parametritzada

$$\alpha(t) = (a \sin^2 t, b \cos t \sin t, c \cos t), \quad 0 < t < 2\pi,$$

es troba en un el·lipsoide. Determineu els punts d'intersecció de α amb l'el·lipse

$$\beta(u) = (a \sin u, b \cos u, 0), \quad 0 < u < 2\pi,$$

i els angles de tall de les dues corbes en aquests punts.

Exercici 14. (*Longitud d'arc i curvatura d'una corba plana en coordenades polars.*)

- (i) Proveu que les expressions de la longitud d'arc i de la curvatura d'una corba plana en coordenades polars $\rho = \rho(\theta)$ són, respectivament,

$$s(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\theta \quad \text{i} \quad \kappa(\theta) = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{\sqrt{(\rho^2 + \rho'^2)^3}}.$$

- (ii) Apliqueu el resultat anterior a la cardiode d'equació polar $\rho(\theta) = 2a(1 - \cos \theta)$.

Exercici 15. (*Espiral d'Arquímedes.*) Una recta L que passa per l'origen O del pla xy gira al voltant de O amb velocitat angular constant. Simultàniament, un punt P de la recta L es desplaça damunt de la recta amb velocitat uniforme. La trajectòria que descriu el punt P rep el nom d'*espiral d'Arquímedes*.

- (i) Proveu que l'equació en coordenades polars de l'espiral d'Arquímedes és $\rho = a\theta$.
- (ii) Determineu l'equació en coordenades cartesianes de l'espiral d'Arquímedes.
- (iii) Trobeu la funció longitud d'arc de l'espiral d'Arquímedes.
- (iv) Trobeu la curvatura de l'espiral d'Arquímedes.

Exercici 16. Trobeu el triedre de Frenet i les funcions longitud d'arc, curvatura i torsió de la corba $\alpha(t) = (e^t, e^{-t}, t)$ en el punt $t = 0$.

Exercici 17.

- (1) Trobeu el triedre de Frenet, i la curvatura i torsió de $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ en el punt $t = 1$.

- (2) Proveu que si un punt es troba a la intersecció dels plans osculadors per tres punts diferents de la corba $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$, aquest punt no es pot trobar sobre la tangent de cap dels tres punts de la corba.

Exercici 18. Proveu que $\alpha(t) = (t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t})$ és plana i determineu el pla que la conté.

Exercici 19. Sigui $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una corba parametritzada 2-regular, $t_0 \in I$, i $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la projecció ortogonal afí de $\mathbb{R}^3$ sobre el pla osculador de α en t_0 . Proveu que la curvatura $\kappa(t_0)$ de α en t_0 és igual a la curvatura en t_0 de la corba plana $\pi \circ \alpha$. (Nota: Si $p_0 = \alpha(t_0)$ i $\mathbf{b}_0$ és el vector binormal de α en t_0 , aleshores $\pi(x) = x - \langle x - p_0, \mathbf{b}_0 \rangle \mathbf{b}_0$.)

Exercici 20. Considerem la corba

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, 0, e^{-\frac{1}{t^2}}) & t > 0 \\ (t, e^{-\frac{1}{t^2}}, 0) & t < 0 \\ (0, 0, 0) & t = 0 \end{cases}$$

- (1) Proveu que α és una corba diferenciable, α és regular per a tot t , i $k(t) \neq 0$ per a $t \neq 0$, $t \neq \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, i $k(0) = 0$.
- (2) Proveu que el límit dels plans osculadors quan $t \rightarrow 0$ ($t > 0$) és el pla $y = 0$, però el límit quan $t \rightarrow 0$ ($t < 0$) és el pla $z = 0$. Això confirma la discontinuïtat del vector $\vec{n}(t)$ quan $t = 0$, atès que $k(0) = 0$.

Exercici 21. (*Indicatriu de les tangents.*) Sigui $\alpha(s)$ una corba 2-regular parametritzada per l'arc, i sigui $\alpha_1(s) = \alpha'(s)$. Proveu que la curvatura κ_1 i la torsió τ_1 de la corba α_1 s'expressen en funció de la curvatura κ i la torsió τ de α per les fórmules següents

$$\kappa_1^2 = \frac{\kappa^2 + \tau^2}{\kappa^2}, \quad \tau_1 = \frac{\tau' \kappa - \kappa' \tau}{\kappa(\kappa^2 + \tau^2)}.$$

Deduïu-ne que α_1 és plana si i només si $\frac{\tau}{\kappa}$ és constant.

Exercici 22. (*Equacions intrínseques.*) Trobeu equacions intrínseques de

- (i) la catenària $y = a \cdot \cosh \frac{x}{a}$.
- (ii) la cicloide $\alpha(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$.
- (iii) la corba $\alpha(t) = (a \cosh t, a \sinh t, at)$.

Exercici 23. Proveu que si les rectes tangents d'una corba 1-regular passen per un punt fix, aleshores la corba està continguda en una recta.

Exercici 24. Proveu que si les rectes tangents d'una corba 1-regular són perpendiculars a una direcció fixa, aleshores la corba és plana.

Exercici 25. Proveu que si els plans osculadors d'una corba 2-regular passen per un punt fix, aleshores la corba és plana. Concloeu-ne que la trajectòria d'una partícula que es mou en un camp de forces central és plana. Apliqueu aquest resultat a les òrbites dels planetes.

Exercici 26. Proveu que si els plans normals d'una corba 2-regular són paral·lels a una direcció fixa, aleshores la corba és plana.

Exercici 27. Proveu que si les rectes normals d'una corba 2-regular passen per un punt fix, aleshores la traça de la corba és un arc de circumferència.

Exercici 28. (*Hèlices generalitzades.*) Una corba que forma un angle constant amb una direcció fixa de l'espai s'anomena *hèlice generalitzada* (vegeu [https://ca.wikipedia.org/wiki/Hèlix_\(geometria\)](https://ca.wikipedia.org/wiki/Hèlix_(geometria))). La direcció fixa s'anomena l'*eix* de l'hèlice, i la tangent trigonomètrica de l'angle d'inclinació de l'hèlice respecte del pla ortogonal a l'eix s'anomena el *pendent* de l'hèlice. Proveu que, si α és una corba 2-regular, les propietats següents són equivalents (*teorema de Lancret*):

- (i) α és una hèlice generalitzada.
- (ii) La raó $\frac{\tau}{\kappa}$ entre la torsió i la curvatura de α és constant (el pendent de l'hèlice).
- (iii) El vector de Darboux de α , $w = \tau T + \kappa B$, és paral·lel a una direcció fixa (l'eix de l'hèlice).

Exercici 29. Proveu que cadascuna de les corbes següents és una hèlice generalitzada i trobeu-ne l'eix i el pendent.

- (i) $\alpha(u) = (a \cosh u, a \sinh u, au)$,
- (ii) $\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$,
- (iii) $\alpha(t) = (2t, \log t, t^2)$,
- (iv) $\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$,

Exercici 30. Sigui α una hèlice generalitzada que forma angle ω amb el seu eix $\mathbf{w}$, i sigui $\alpha_1(t) = \alpha(t) - \langle \alpha(t), \mathbf{w} \rangle \mathbf{w}$ la projecció ortogonal de α sobre un pla perpendicular a l'eix. Proveu que:

- (i) la traça de α està continguda dins d'un cilindre de base α_1 i eix $\mathbf{w}$, i talla les generatrius del cilindre amb angle ω ;
- (ii) si s (resp. s_1) és el paràmetre arc i k (resp. k_1) és la curvatura de α (resp. α_1) aleshores

$$s_1 = s \cdot \sin \omega, \quad k = k_1 \cdot \sin^2 \omega;$$

- (iii) dedueu-ne que l'hèlice α queda determinada per l'eix $\mathbf{w}$, l'angle ω i la seva projecció α_1 .

Exercici 31. Sigui $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una corba 2-regular plana parametritzada per la longitud de l'arc. Denotem per κ la seva curvatura i per (T, N, B_0) el seu triedre de Frenet. Sigui $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ la corba parametritzada definida per

$$\beta(t) = \alpha(t) + t \cdot B_0, \quad \text{per a tot } t \in I.$$

- (i) Proveu que β és 2-regular i trobeu la seva longitud entre els punts 0 i $t \in \mathbb{R}$.
- (ii) Trobeu la curvatura κ_β i la torsió τ_β de la corba β en funció de κ .
- (iii) Proveu que β és una hèlice generalitzada i determineu el seu eix i el seu pendent.

Exercici 32. (*Corbes esfèriques.*) Sigui α una corba 2-regular parametritzada per l'arc, amb curvatura κ i torsió τ . Suposem que ni κ' ni τ no s'anul·len enlloc. Denotem $R = \frac{1}{\kappa}$, $T = \frac{1}{\tau}$. Proveu que la traça de α està continguda en una esfera de radi a si i només si

$$R^2 + (TR')^2 = a^2.$$

Exercici 33. (*Espiral logarítmica.*) Una recta L , que passa per l'origen O del pla xy , gira al voltant de O amb velocitat angular constant. Simultàniament, un punt P de la recta L es desplaça damunt de la recta amb velocitat proporcional a la distància a l'origen. La corba que descriu el punt P s'anomena *espiral logarítmica*. (Vegeu https://ca.wikipedia.org/wiki/Espiral_logarítmica.)

- (i) Proveu que l'equació d'aquesta corba en coordenades polars és $\rho = ae^{b\theta}$, amb $a > 0$ i $b \neq 0$ constants. Proveu que un gir amb centre en el punt asimptòtic actua sobre l'espiral com una dilatació. Doneu una interpretació visual d'aquest fet.
- (ii) Proveu que l'espiral logarítmica talla les semirectes per l'origen en un angle constant i que, recíprocament, si una corba talla les semirectes per un punt P en un angle constant (diferent de 0 i $\frac{\pi}{2}$) aleshores aquesta corba és una espiral logarítmica amb punt asimptòtic P .
- (iii) Proveu que una corba plana 1-regular $\alpha(t)$ és una espiral logarítmica amb punt asimptòtic O si i només si la funció longitud d'arc de α té la forma $s(t) = c\rho(t)$, on $\rho(t)$ és la distància de $\alpha(t)$ a 0, i c és una constant no nul·la.
- (iv) Trobeu la curvatura de l'espiral logarítmica i dedueu-ne l'equació intrínseca en la forma $\kappa = \kappa(s)$.

Exercici 34. (*Hèlices còniques.*) Proveu que una hèlice traçada sobre un con de revolució, de manera que l'eix de l'hèlice coincideixi amb l'eix del con, es projecta sobre un pla perpendicular a l'eix

en una espiral logarítmica. Deduïu-ne que les equacions intrínseques de les hèlices còniques tenen la forma $\kappa = \frac{a}{s}, \tau = \frac{b}{s}$ on a, b són constants. Un exemple a la natura d'aquesta corba és la turritella (vegeu http://en.wikipedia.org/wiki/Turritella_cingulifera).

Exercici 35. (*Epicicloide.*) L'*epicicloide* és la corba descrita per un punt d'una circumferència de radi b que roda exteriorment sense lliscar damunt d'una altra circumferència fixa de radi a , que suposarem centrada en l'origen de coordenades (vegeu <https://ca.wikipedia.org/wiki/Epicicloide>).

(i) Proveu que l'epicicloide es pot parametritzar per:

$$x = (a+b) \cos t - b \cos \left(\frac{a+b}{b} t \right), \quad y = (a+b) \sin t - b \sin \left(\frac{a+b}{b} t \right)$$

on t és l'angle que forma la línia que uneix els centres de les circumferències amb l'eix Ox , i $(a, 0)$ és el punt inicial.

- (ii) Estudieu els punts singulars de α .
- (iii) Proveu que α és periòdica si $\frac{a}{b}$ és racional.
- (iv) Trobeu la longitud de α per a un cicle complet de la circumferència mòbil.
- (v) Trobeu una equació intrínseca de l'epicicloide. Proveu que si a, b denoten els radis de les circumferències generadores, l'equació intrínseca es pot escriure com

$$\frac{s^2}{A^2} + \frac{\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2}{B^2} = 1,$$

essent $A = \frac{4b(a+b)}{a}$ i $B = \frac{4b(a+b)}{a+2b}$ (que, observem, satisfan $A > B > 0$). Recíprocament, l'equació intrínseca anterior, amb $A > B > 0$, correspon a una epicicloide de radis a, b tals que $a = \frac{AB^2}{A^2 - B^2}$ i $b = \frac{AB}{2(A+B)}$.

Exercici 36. (*Hèlice esfèrica.*) Proveu que la projecció ortogonal d'una hèlice esfèrica sobre un pla normal a l'eix té per traça un arc d'epicicloide. (*Indicació:* Useu equacions intrínseques de l'epicicloide i de les corbes esfèriques.)

Exercici 37. (*Indicatriu binormal.*) Sigui $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una corba 2-regular parametritzada per la longitud de l'arc. Denotem per κ i τ la curvatura i la torsió de α respectivament, i per (T, N, B) el triedre de Frenet. Suposem que $\tau(s) \neq 0$, per a tot $s \in I$. Sigui $\alpha_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ la corba parametrizada definida per

$$\alpha_1(s) = B(s), \quad \text{per a tot } s \in I.$$

Denotem per κ_1, τ_1 la curvatura i la torsió de α_1 respectivament, i per (T_1, N_1, B_1) el triedre de Frenet de α_1 .

(i) Proveu que α_1 és 2-regular i que

$$\kappa_1(s) = \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa(s)}{\tau(s)} \right)^2} \quad \text{per a tot } s \in I.$$

(ii) Proveu que, per a tot $s \in I$, la direcció binormal $B_1(s)$ de α_1 en s coincideix amb la direcció del vector de Darboux de α en s :

$$-\tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s)$$

(iii) Deduïu-ne que α_1 és una circumferència si, i només si, α és una hèlice generalitzada.

Exercici 38. Sigui $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, una corba parametrizada regular de $\mathbb{R}^3$, parametrizada per l'arc, i amb curvatura sempre diferent de zero. Sigui P un pla que compleix:

- (1) P conté la recta tangent a α en $\alpha(s_0)$,
- (2) per a tot entorn $J \subset I$ de s_0 , hi ha punts de $\alpha(J)$ en tots dos costats del pla.

Proveu que P és el pla osculador de la corba α pel punt $\alpha(s_0)$.

Exercici 39. Sigui $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una corba 2-regular parametritzada per l'arc, on $I \subset \mathbb{R}$ és un interval obert de $\mathbb{R}$. Sigui $s_0 \in I$. Denotem per $\{t_0, n_0, b_0\}$ el triedre de Frenet de la corba γ en el punt $\gamma(s_0)$. Considerem el pla Π_0 pel punt $\gamma(s_0)$ i determinat pels vectors $\frac{1}{\sqrt{2}}(t_0 + n_0)$ i $\frac{1}{\sqrt{2}}(t_0 + b_0)$. Sigui $\Gamma(s)$ la projecció ortogonal de $\gamma(s)$ en Π_0 .

- (1) Proveu que existeix un $\varepsilon > 0$ tal que $\Gamma(s)$ és 2-regular per a $s \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$.
- (2) Trobeu la curvatura $K(s_0)$ de la corba $\Gamma(s)$ en funció de $k(s_0)$ ($k(s_0)$ és la curvatura de γ).
- (3) Trobeu el triedre de Frenet de Γ en el punt $\Gamma(s_0)$.
- (4) Trobeu la torsió $T(s_0)$ de la corba $\Gamma(s)$.

Exercici 40. (*Examen de Setembre de 2005.*) Sigui $\alpha(s)$ una corba regular parametritzada per l'arc, amb curvatura constant $k = 1$ i torsió $\tau \neq 0$. Sigui $\beta(s)$ l'evolució de α , és a dir, la corba descrita pels centres de curvatura de α . En aquest cas

$$\beta(s) = \alpha(s) + n(s).$$

- (1) Demostreu que β és una corba regular, trobeu la seva curvatura i la seva torsió.
- (2) Trobeu el triedre de Frenet de β i demostreu que l'evolució de β és α .

Exercici 41. (*Examen de Gener de 2015.*) Sigui $I \subset \mathbb{R}$ un interval obert i $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una corba parametritzada per l'arc. Sigui $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ la curvatura de α , i suposem que $k(s) \neq 0$ per a tot $s \in I$. Definim la corba $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ com

$$\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}n(s),$$

on $n(s)$ és el vector normal unitari de la corba α al punt s .

- (1) Demostreu que β és una corba regular si i només si k' no s'anul·la enlloc.
- (2) Demostreu que el vector tangent unitari de β al punt $s \in I$ coincideix amb $n(s)$.
- (3) Demostreu que la longitud de l'arc de l'evolució entre els punts $s_0 < s_1$ de I és igual a

$$\left| \frac{1}{k(s_1)} - \frac{1}{k(s_0)} \right|.$$

Exercici 42. Sigui $\alpha(s)$ una corba 2-regular de $\mathbb{R}^3$, parametritzada per l'arc, amb curvatura i torsió constants i iguals a 1. Denotem per $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)$ el triedre de Frenet de la corba α en el punt $\alpha(s)$. Considerem la corba

$$\gamma(s) := \alpha(s) + \mathbf{t}(s) + \mathbf{n}(s).$$

- a) Trobeu el paràmetre arc u de la corba γ en funció de s .
- b) Trobeu la curvatura, la torsió i el triedre de Frenet de γ en funció de la curvatura, la torsió i el triedre de Frenet de la corba α .
- c) Proveu que el vector director de la recta intersecció dels plans osculadors de α i γ pels punts $\alpha(s)$ i $\gamma(s)$ és el vector $\mathbf{t}(s) + 2\mathbf{n}(s)$.

Exercici 43. Sigui $\alpha(s)$, $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, una corba regular de $\mathbb{R}^3$, parametritzada per l'arc, tal que $k \neq 0$ i $k \neq \tau$. Es defineix

$$\beta(s) = \int_0^s (t(u) + b(u)) du$$

- (1) Trobeu un paràmetre arc per a la corba $\beta(s)$.
- (2) Demostreu que la curvatura K de la corba $\beta(s)$ és $K = \frac{1}{2}|k - \tau|$.
- (3) Comproveu que el valor absolut de la torsió de la corba $\beta(s)$ és $|\frac{k+\tau}{2}|$.

Exercici 44. (*Examen de Gener de 2015.*) Sigui $n \geq 1$ un nombre natural i siguin $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{R}^3$ vectors qualssevol. Suposem que $v_n \neq 0$. Definim

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \alpha(t) = \sum_{k=0}^n t^k v_k.$$

Suposem que α és 2-regular.

- (1) Demostreu que existeix algun $i \in \{0, \dots, n-1\}$ tal que v_i i v_n són linealment independents.
- (2) Sigui $m \in \{0, \dots, n-1\}$ l'enter més gran tal que v_m i v_n són linealment independents. Demostreu que existeix un vector $u \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ amb la propietat que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{t^{m+n-3}} = u.$$

- (3) Demostreu que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle}{t^{2n-2}} = n^2 \|v_n\|^2.$$

- (4) Sigui $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ la funció curvatura de α . Demostreu que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = 0.$$

Exercici 45. Sigui $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una corba 2-regular parametritzada per l'arc amb la traça inclosa dins l'esfera de radi $r > 0$ centrada a l'origen, de manera que se satisfà que $\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle = r^2$ per a tot $s \in I$.

- (1) Demostreu que

$$\langle \alpha(s), t(s) \rangle = 0$$

per a tot $s \in I$, on $t : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ és el vector tangent unitari de α .

- (2) Demostreu que

$$1 + k(s) \langle \alpha(s), n(s) \rangle = 0$$

per a tot $s \in I$, on $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ és la curvatura de α i $n : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ és el vector normal.

- (3) Demostreu que $k(s) \geq r^{-1}$ per a tot $s \in I$.
- (4) Demostreu que si $k(s) = r^{-1}$ aleshores se satisfà $n(s) = -\alpha(s)r^{-1}$.
- (5) Demostreu que si $k(s) \neq r^{-1}$ aleshores el vector binormal $b(s)$ satisfà $\langle \alpha(s), b(s) \rangle \neq 0$.
- (6) Deduïu-ne que si la curvatura de α és constant, aleshores la traça de α està continguda en un pla. (*Sugeriment:* Demostreu que si la curvatura de α és constant, aleshores la seva torsió és zero; estudeu separatament els casos $k = r^{-1}$ i $k \neq r^{-1}$.)