Geometria lineal

Curs 2004–2005, primer quadrimestre

1. Formes de Jordan

1.1 Calculeu el polinomi mínim i les components primàries F_i de les matrius següents. Trobeu, en cada cas, la descomposició del vector $(1,0,1,0)$ com a suma de les seves components en els subespais F_i.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2 Trobeu el polinomi mínim, la matriu de Jordan i una base de Jordan per a cadascuna de les matrius següents:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\sqrt{2}i \\ -1 & 1 & \sqrt{2}i \\ -\sqrt{2}i & \sqrt{2}i & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 7 & -12 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & -6 & 5 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ -5 & 6 & -5 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

1.3 Trobeu totes les formes de Jordan que siguin compatibles amb els polinomis mínims i els polinomis característics següents:

(i) $p(x) = (x-7)^6,\ \ m(x) = (x-7)^2;$

(ii) $p(x) = -(x-2)^4(x-3)^3,\ \ m(x) = (x-2)^2(x-3)^2;$

(iii) $p(x) = -(x-2)^4(x-3)^3,\ \ m(x) = (x-2)^3(x-3)^2;$

(iv) $p(x) = -(x-3)^4(x-5)^3,\ \ m(x) = (x-3)^2(x-5).$

1.4 Trobeu el polinomi mínim i la matriu de Jordan de les matrius següents, segons els valors que prenguin els paràmetres.

$$\begin{pmatrix} a & 1-b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & a & b & a \\ 0 & 2 & c & 1 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ -1 & 2 & a \\ a & -a & 3-2\sqrt{2}a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & b & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & 1 & 3 & 1 \\ 0 & a+2 & 6 & 2 \\ 2(a^2-1) & 1-a^2 & a & 0 \\ 6(1-a^2) & 3a^2-5 & -6 & a-2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -a & a-1 \\ 2a & 2a+1 & 2a & 0 \\ 1-2a & 1-2a & 1-a & 1-a \\ -a & -a & -a & 1 \end{pmatrix}$$

1.5 Determineu A^n per a tot n per a la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1.6 Sigui $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfisme que té els valors propis 1 i 2 i només aquests. Sigui $E_1 = \langle (1,1,0) \rangle$ el subespai de vectors propis amb valor propi 1 i sigui $E_2 = \langle (1,1,1) \rangle$ el subespai de vectors propis amb valor propi 2. Demostreu que $\det f = 2$ i $\operatorname{tr} f = 4$ o bé $\det f = 4$ i $\operatorname{tr} f = 5$. Trobeu la matriu de Jordan en cada cas.

1.7 (Setembre 2001) Sigui f un endomorfisme d'un espai vectorial real de dimensió 3 tal que $f^3 = f^2$. Doneu la forma de Jordan en el cas que $\operatorname{rang}(f) = 2$ i $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) \neq \{\vec{0}\}$.

1.8 (Setembre 2003) Trobeu, en funció del paràmetre real $m \in \mathbb{R}$, la forma de Jordan per a l'endomorfisme d'un espai vectorial complex de dimensió 3 que en una certa base $\{e_1, e_2, e_3\}$ té per matriu

$$\begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ 1 & 2 & -m \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$