

1. Espais afins

- 1.1 Siguin a, b, c i d punts d'un espai afí. Demostreu que les condicions següents són equivalents i que, sota aquestes condicions, els quatre punts són coplanaris:

- a) $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ad} = \overrightarrow{ac}$;
- b) $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$;
- c) $\overrightarrow{ad} = \overrightarrow{bc}$;
- d) $a + \frac{1}{2}\overrightarrow{ac} = b + \frac{1}{2}\overrightarrow{bd}$;
- e) $c = a + \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ad}$.

Nota: Quan quatre punts a, b, c i d són diferents i no n'hi ha tres d'alineats i se satisfan aquestes condicions equivalents, es diu que els quatre punts formen un *paral·lelogram* de costats ab, bc, cd i da . La quarta condició ens diu que els paral·lelograms estan caracteritzats pel fet que les diagonals es tallen en els seus punts mitjos.

- 1.2 Siguin $p_1, \dots, p_n$ punts d'un espai afí i sigui σ una permutació del conjunt d'índexs $\{1, 2, \dots, n\}$. Demostreu la relació $\overrightarrow{p_1 p_{\sigma(1)}} + \dots + \overrightarrow{p_n p_{\sigma(n)}} = 0$.
- 1.3 Siguin $\{p_1, \dots, p_N\}$ i $\{q_1, \dots, q_N\}$ dos conjunts de punts en un espai afí i siguin P i Q els seus baricentres respectivament. Expresseu la suma $\overrightarrow{p_1 q_1} + \dots + \overrightarrow{p_N q_N}$ en funció de $\overrightarrow{PQ}$.
- 1.4 En un pla afí es considera un quadrilàter $ABCD$. Demostreu que els punts mitjos dels costats AB, BC, CD i DA són els vèrtexs d'un paral·lelogram. Digueu si el mateix és cert prenent ara punts A, B, C, D en un espai afí de dimensió tres.
- 1.5 En un pla afí es considera un paral·lelogram $ABCD$ de diagonals AC i BD . Sigui P el punt mig del costat DC i sigui Q el punt mig del costat BC . Demostreu que les rectes AP i AQ divideixen la diagonal BD en tres parts iguals.
- 1.6 Siguin A, B, C els vèrtexs d'un triangle d'un pla afí i sigui r una recta que talla les rectes AB, BC i CA en els punts P, Q i R respectivament. Demostreu que els punts

$$I = A + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AR}, \quad J = B + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{BP}, \quad K = C + \overrightarrow{CR} + \overrightarrow{CQ}$$

estan alineats.

- 1.7 En un pla afí considerem un triangle de vèrtexs P_1, P_2 i P_3 . Per a $i = 1, 2, 3$, sigui Q_i el punt mig de la mediana des del vèrtex P_i . Demostreu que els triangles $P_1 P_2 P_3$ i $Q_1 Q_2 Q_3$ tenen els costats paral·lels.
- 1.8 Siguin $V_1 = a + F$ i $V_2 = b + G$ dues varietats lineals d'un espai afí A i sigui E l'espai vectorial associat a A . De les implicacions següents (on $\{p\}$ designa un conjunt amb un únic element), demostreu les que siguin certes i doneu un contraexemple de les que siguin falses:

- a) $E = F + G \Rightarrow A = V_1 + V_2$;
- b) $A = V_1 + V_2 \Rightarrow E = F + G$;
- c) $F \cap G = \{\vec{0}\} \Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{p\}$;
- d) $V_1 \cap V_2 = \{p\} \Rightarrow F \cap G = \{\vec{0}\}$;
- e) $E = F \oplus G \Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{p\}$.

- 1.9 Considerem l'espai afí $\mathbb{A}^3$ ordinari o estàndard ($A = \mathbb{R}^3$, $E = \mathbb{R}^3$). Demostreu que els conjunts de punts següents són varietats lineals. Determineu la seves dimensions, els subespais directors i un sistema d'equacions paramètriques de cadascuna d'elles.

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(x, y, z) \in A \mid x + y + z = 3\}; \\ V_2 &= \{(x, y, z) \in A \mid x - y + z = 0\}; \\ V_3 &= \{(x, y, z) \in A \mid x - y + z = 0, x - 2y = 1\}; \\ V_4 &= \{(x, y, z) \in A \mid y + z = 0, x - 3y + 2z = 2\}; \\ V_5 &= \{(x, y, z) \in A \mid x - 2y = 1, x + y - z = 2, 3x - 2z = 5\}; \\ V_6 &= \{(x, y, z) \in A \mid x + 3z = 1, x - y + 2z = 1, 3y + z = 0\}. \end{aligned}$$

Determineu la dimensió i el subespai vectorial director de la varietat lineal intersecció $V_2 \cap V_4$.

- 1.10 Sigui H un hiperplà de $\mathbb{A}^n$. Demostreu que tota varietat lineal que no talli H és paral·lela a H .
- 1.11 Siguin $H_1, \dots, H_n$ hiperplans d'un espai afí real de dimensió n . Demostreu que si $\dim(H_1 \cap \dots \cap H_n) = 0$, aleshores per a tot $1 \leq i \leq n$ es té $\dim(H_1 \cap \dots \cap H_i) = n - i$.
- 1.12 a) Fixada una referència cartesiana en un espai afí real de dimensió 3, demostreu que quatre punts $A_i = (x_i, y_i, z_i)$, on $i = 1, 2, 3, 4$, són coplanaris si i només si

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

- b) Fixada una referència cartesiana en un espai afí real de dimensió 3, demostreu que si els quatre plans d'equacions $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$ per a $i = 1, 2, 3, 4$ tenen intersecció no buida, aleshores

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0.$$

És cert el recíproc? Justifiqueu la resposta.

- 1.13 En un espai afí de dimensió 3 tenim dues rectes que, en una referència afí, tenen les equacions

$$r : \begin{cases} x + z = 0 \\ y = -2 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 1 \\ y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

Trobeu la recta t que passa pel punt $(1, 1, 0)$ i talla r i s .

- 1.14 Sigui A un espai afí de dimensió 4 sobre $\mathbb{R}$. En una referència afí donada, considerem

$$r : x = y = z = t; \quad \pi_{(a,b)} : \begin{cases} ax + y + z + t = b \\ x + by - z + t = a \end{cases}$$

Estudieu les posicions relatives de la recta r i el pla $\pi_{(a,b)}$ segons els diferents valors de a i b .

- 1.15 Sigui A un espai afí de dimensió 4 sobre $\mathbb{R}$. En un sistema de referència $\{p; u_1, u_2, u_3, u_4\}$ tenim les varietats lineals següents:

$$\begin{aligned} V_1 : \begin{cases} x + y - z + t = 1 \\ x - 2y + t = 0 \end{cases} & \quad V_2 : 2x + 4y - 2z + t = 1; \\ V_3 = \{(1, 1, 1, 0)\} + \{(0, 0, 2, 1)\}; & \quad V_4 = \{(-4, -3, -9, 0)\} + \{(2, -1, 1, 0)\} + \{(1, 0, 1, 0)\}. \end{aligned}$$

- a) Determineu-ne les dimensions.
- b) Doneu els seus subespais vectorials associats.
- c) Calculeu $V_1 \cap V_2$; $V_3 \cap V_4$; $V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4$; $V_1 + V_2$; $V_3 + V_4$; $V_1 + V_2 + V_3 + V_4$.
- d) Determineu una varietat V_5 de dimensió 2 que passi per p i sigui paral·lela a $V_1 \cap V_2$.

1.16 Donades les rectes

$$r : \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x + 3z = 1 \end{cases} \quad t : \begin{cases} x + 2z = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

trobeu la recta que les talla en tres punts $P \in r$, $Q \in s$, $R \in t$ tals que Q és el punt mig de P i R .

1.17 Considerem les varietats lineals següents a l'espai afí real de dimensió 4:

$$L_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^4 \mid x + y = 7, z + t = a\},$$

$$L_2 = \{(6 + b\lambda, 1 - 2\lambda, -2\lambda, -1 + b\lambda) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^4 \mid \lambda \in \mathbb{R}\},$$

on $a, b \in \mathbb{R}$. Estudieu la dimensió de les varietats lineals $L_1 + L_2$ i $L_1 \cap L_2$ en funció dels paràmetres a, b . Determineu en quins casos les varietats L_1 i L_2 es tallen, són paral·leles o una de elles està inclosa en l'altra.

1.18 Donada una recta r del pla i dos punts $a, b \notin r$, determineu el lloc geomètric dels punts p tals que el quart vèrtex del paral·lelogram que té costats pa i pb pertany a la recta r .

1.19 Donades dues rectes r i s de l'espai afí real de dimensió 3, trobeu el lloc geomètric dels punts mitjos dels parells de punts a, b amb $a \in r$ i $b \in s$.

1.20 En l'espai afí real A de dimensió 3 es consideren dos plans no paral·lels π_1 i π_2 i una recta r no paral·lela a cap d'ells. Descriu el lloc geomètric dels punts mitjos de les interseccions amb π_1 i π_2 de les rectes de l'espai paral·leles a r .

1.21 Donades dues rectes que es creuen a l'espai afí de dimensió 3 i un pla no paral·lel a cap de les rectes, determineu el lloc geomètric dels punts mitjos dels segments amb un extrem a cada recta i paral·lels al pla.

1.22 Donades dues rectes paral·leles r, s del pla afí real, determineu el lloc geomètric dels baricentres dels triangles ABC tals que $A \in r$ i el punt mig del costat BC pertany a la recta s .

1.23 Fixat un tetraedre en un espai afí i un parell d'arestes oposades del mateix, es consideren els plans paral·lels a aquest parell de rectes que no contenen cap d'elles.

- a) Demostreu que aquests plans tallen les arestes restants en els vèrtexs d'un paral·lelogram.
- b) Demostreu que els punts d'intersecció de les diagonals d'aquests paral·lelograms es troben sobre una recta i descriu-la geomètricament.

1.24 Siguin r i s dues rectes de l'espai afí real de dimensió 3 i sigui P un punt que no pertany a cap d'elles. Estudieu si existeixen rectes t (i quantes n'hi ha) que passin per P i tallin r i s . Discutiu els casos possibles: que r i s es creuin, es tallin, siguin paral·leles diferents o coincideixin.

1.25 Donades tres rectes r, s i t de $\mathbb{A}^3$ de manera que els seus vectors directors són independents, demostreu que existeix una única recta l paral·lela a t i tal que $r \cap l \neq \emptyset$, $s \cap l \neq \emptyset$.

- 1.26 Sigui ABC un triangle d'un pla afí. Sigui $M_0 \in A + B$ un punt qualsevol i definim els punts $M_1, \dots, M_6$ de la manera següent: siguin M_1 el punt de tall de la paral·lela a BC per M_0 amb AC , M_2 el punt de tall de la paral·lela a AB per M_1 amb BC , M_3 el punt de tall de la paral·lela a AC per M_2 amb AB , etc. Demostreu que $M_6 = M_0$.
- 1.27 En un espai afí real de dimensió 3 es consideren, en una referència donada, els plans $H_1 : x = 1$, $H_2 : y = 0$ i $H_3 : z = -1$. Trobeu l'equació dels plans H tals que H_1 , H_2 i H_3 tallen H en rectes que formen un triangle amb baricentre en el punt $(0, 1, 1)$.
- 1.28 Siguin a_1, a_2, a_3, a_4 punts del pla afí real tals que no n'hi ha tres sobre una mateixa recta. Designem per g, b_1, b_2, b_3, b_4 els baricentres de $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $\{a_2, a_3, a_4\}$, $\{a_1, a_3, a_4\}$, $\{a_1, a_2, a_4\}$ i $\{a_1, a_2, a_3\}$ respectivament. Demostreu que les rectes b_1b_3 i b_2b_4 es tallen en g si i només si a_1, a_2, a_3 i a_4 formen un paral·lelogram de diagonals a_1a_3 i a_2a_4 .
- 1.29 Siguin $a \neq b$ dos punts del pla afí real. Dibuixeu els punts p_i , per a $i = 1, \dots, 9$, tals que

$$\begin{array}{lll} (p_1, a, b) = 3; & (p_2, a, b) = 1; & (p_3, a, b) = 0; \\ (a, p_4, b) = 3; & (a, p_5, b) = 1; & (a, p_6, b) = 0; \\ (a, b, p_7) = 3; & (a, b, p_8) = 1; & (a, b, p_9) = 0. \end{array}$$

Atenció! No tots els casos són possibles.

- 1.30 Siguin a, b, c tres punts d'una recta r i a', b', c' punts d'una recta s . Suposem que les dues ternes tenen la mateixa raó simple: $(a, b, c) = (a', b', c')$. Siguin a'', b'', c'' punts tals que

$$(a, a', a'') = (b, b', b'') = (c, c', c'').$$

Demostreu que a'', b'' i c'' estan alineats i calculeu la raó simple (a'', b'', c'') .

- 1.31 Sigui ABC un triangle i siguin A', B' i C' tres punts situats sobre les rectes BC , AC i AB respectivament. Demostreu que els triangles ABC i $A'B'C'$ tenen el mateix baricentre si i només si se satisfan les igualtats $(A', B, C) = (B', C, A) = (C', A, B)$.

- 1.32 a) Sigui P un punt del pla afí real i r una recta que no passi per P . Fixat $\lambda \in \mathbb{R}$, trobeu el lloc geomètric dels punts Q tals que $(Q, A, P) = \lambda$ al variar A en r .
b) Fixat un sistema de referència $\{O; e_1, e_2\}$ del pla, considerem les rectes que tenen per equacions

$$r : x - 2y + 3 = 0, \quad s : 2x + y - 4 = 0.$$

Trobeu els punts Q tals que $(Q, A, O) = \frac{1}{2}$ i $(Q, B, O) = 2$ amb $A \in r$ i $B \in s$.

- 1.33 (Teorema de Pappus) Donades dues rectes diferents no paral·leles r i s del pla afí amb $O = r \cap s$, es donen tres punts diferents A, B, C de r i tres punts diferents A', B', C' de s , tots sis diferents de O . Demostreu que els punts $M = AB' \cap A'B$, $N = AC' \cap A'C$ i $P = BC' \cap B'C$ estan alineats.