

2. Afinitats

En aquesta llista d'exercicis, $\mathbb{A}^n$ denota un espai afí de dimensió n amb espai vectorial associat E sobre un cos K de característica zero. Escriurem $\mathbb{A}_K^n$ quan convingui especificar el cos K .

2.1 Sigui $f: \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ una afinitat amb endomorfisme associat $\tilde{f}$. Donada una varietat lineal $L = a + F$, decideixi si les implicacions següents són certes o falses:

(a) $f(L) = L \Rightarrow \tilde{f}(F) = F$.

(b) $\tilde{f}(F) = F \Rightarrow f(L) = L$.

2.2 Sigui f una afinitat de $\mathbb{A}^n$. Demostreu que f és una homotècia o una translació si i només si transforma tota recta de $\mathbb{A}^n$ en una recta paral·lela a ella.

2.3 Demostreu que la composició de dues homotècies és una homotècia o bé una translació. Determineu, en cada cas,

(a) el centre i la raó de l'homotècia;

(b) el vector de la translació,

en funció dels centres i les raons de les homotècies donades.

2.4 Demostreu que el conjunt de les translacions i les homotècies de $\mathbb{A}^n$ és un grup amb la composició.

2.5 Siguin p_1, p_2, p_3 i p_4 punts d'un pla afí real. Per a $1 \leq i \leq 4$, sigui S_i la simetria central respecte al punt p_i . Demostreu que es verifica $S_4 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1 = \text{Id}$ si i només si els punts p_i són els vèrtexs consecutius d'un paral·lelogram.

2.6 Sigui $\{p; e_1, e_2\}$ un sistema de referència en $\mathbb{A}^2$. Sigui $g: \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$ l'aplicació afí que transforma els punts

$$Q = (2, 1), N = (1, 2), M = (2, 2) \quad \text{en} \quad g(Q) = (3, 1), g(N) = (1, 3), g(M) = (3, 3).$$

Trobeu les equacions de g .

2.7 Considerem les rectes de $\mathbb{A}^2$ que en un sistema de referència tenen les equacions

$$r_1: x + y = 1; \quad r_2: x + 2y = 0; \quad r_3: 4x - y = 2.$$

Trobeu les equacions de les afinitats f tals que $f(r_1) = r_2, f(r_2) = r_3, f(r_3) = r_1$.

2.8 Sigui $f: \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ l'afinitat del pla donada per les equacions

$$x^* = x - y + 1$$

$$y^* = x + y + 2$$

(a) Trobeu-ne els punts fixos i les rectes invariants.

(b) Sigui r la recta d'equació $2x + 3y = 1$. Calculeu les equacions de $f(r)$ i $f^{-1}(r)$.

(c) Trobeu les equacions de la inversa de f .

2.9 Calculeu els punts fixos i les rectes invariants de l'afinitat f que té per equacions

$$\begin{aligned}x^* &= -3x + 2y + 2 \\ y^* &= -2x + 2y + 1\end{aligned}$$

Feu el mateix amb l'afinitat f^n per a $n \geq 2$.

2.10 Calculeu, en funció del paràmetre a , les varietats lineals invariants de l'aplicació afi següent:

$$\begin{aligned}x^* &= ax - y - z + 1 \\ y^* &= y + 2z + 1 \\ z^* &= -z\end{aligned}$$

2.11 Una *homologia* és una afinitat que té un hiperplà de punts fixos. Sigui f una homologia del pla. Direm que f és *general de raó* ρ si $\rho = \det(\tilde{f}) \neq 1$ on $\tilde{f}$ és l'automorfisme associat a f . Si el determinant és 1, direm que és *especial*. Anomenarem *eix* a l'hiperplà de punts fixos.

(a) Trobeu les rectes invariants per una homologia.

(b) Demostreu que si f és general i x és un punt que no és fix aleshores la recta $xf(x)$ talla l'eix en un punt p i es compleix

$$(f(x), x, p) = \rho.$$

(c) Demostreu que si f és especial i x és un punt que no és fix aleshores la recta $xf(x)$ és paral·lela a l'eix.

(d) Determineu gràficament la imatge d'un punt per una homologia general del pla a partir de l'eix, les rectes invariants i la raó.

(e) Determineu gràficament la imatge d'un punt per una homologia especial del pla a partir de l'eix i la imatge d'un punt donat no fix.

2.12 Sigui $f_a: \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ la família d'afinitats que en una referència fixada té les equacions següents:

$$\begin{aligned}x^* &= ay + 1 - 2a \\ y^* &= -ax + 2ay + 2 - 3a\end{aligned}$$

on a és un paràmetre real no nul.

(a) Demostreu que existeix un únic punt fix comú a totes les afinitats f_a .

(b) Demostreu que existeix un únic a per al qual f_a té una recta de punts fixos. Trobeu totes les rectes invariants en aquest cas. És una simetria?

(c) Sigui h l'homotècia de centre $(1, 2)$ i raó $a \neq 0$. Comproveu que $f_a = f_1 \circ h$.

2.13 Sigui f l'afinitat de $\mathbb{A}^2$ d'equacions

$$\begin{aligned}x^* &= -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + 2 \\ y^* &= \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}y + 2\end{aligned}$$

(a) Expresses f com la composició $f = t_u \circ h$ d'una homologia h i una translació t_u paral·lela a l'eix de h .

(b) Determineu l'eix de h . Busqueu el lloc geomètric dels punts mitjos de p i de $f(p)$ per a $p \in \mathbb{A}^2$.

2.14 Trobeu totes les afinitats del pla que deixen invariant un triangle donat i determineu els punts fixos de cadascuna d'elles. Observeu que és un grup. És commutatiu?

- 2.15 Descriviu l'afinitat del pla que transforma els vèrtexs d'un triangle en els punts mitjos dels costats oposats.
- 2.16 Es consideren en el pla afí $\mathbb{A}^2$ tres punts A_1, A_2, A_3 no alineats. Siguin B_1, B_2, B_3 els punts mitjos de A_2A_3, A_1A_3 i A_1A_2 respectivament. Analògament, siguin C_1, C_2, C_3 els punts mitjos de B_2B_3, B_1B_3 i B_1B_2 . Descriviu l'afinitat que transforma A_i en C_i , per a cada $i = 1, 2, 3$.
- 2.17 Donats quatre punts A, B, C, D de $\mathbb{A}^2$, tres d'ells independents, trobeu la condició que han de complir perquè existeixi una afinitat f tal que $f(A) = B, f(B) = C, f(C) = D$ i $f(D) = A$. Determineu els punts fixos i les rectes invariants d'aquesta afinitat.
- 2.18 Siguin F, A, A^* tres punts alineats del pla afí. Considerem totes les afinitats que deixen fix F , transformen A en A^* i tenen una única recta invariant. Trobeu el lloc geomètric de les imatges d'un punt donat per aquestes afinitats.
- 2.19 Sigui ABC un triangle del pla i O un punt que no pertany a cap dels seus costats. Siguin A', B', C' els punts mitjos dels segments BC, AC i AB respectivament i siguin A'', B'', C'' les imatges de A', B', C' per l'homotècia de centre O i raó r . Demostreu que si $r \neq -2$ llavors les rectes AA'', BB'', CC'' són concurrents. És cert el mateix si $r = -2$?
- 2.20 Donat un paral·lelogram $ABCD$ en el pla afí, considerem la família d'afinitats f tals que $f(A) = B, f(B) = C$ i $f(C)$ és un punt de la recta AD .
- (a) Demostreu que hi ha una única afinitat de la família sense punts fixos.
 - (b) Demostreu que totes les altres afinitats de la família tenen un punt fix i trobeu el lloc geomètric d'aquest punt.