

3. Espais vectorials euclidians

3.1 Demostreu que la forma bilineal a $\mathbb{R}^3$ definida com

$$f((x, y, z), (x', y', z')) = 2xx' + 5yy' + 5zz' + 2xy' + 2x'y - 2xz' - 2x'z - 4yz' - 4y'z$$

és un producte escalar en aquest espai vectorial.

- (a) Trobeu una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ respecte a f .
- (b) Calculeu la norma de $(1, 1, 1)$ respecte a f .
- (c) Calculeu el subespai $\langle (1, 0, 0), (1, 1, 0) \rangle^\perp$ respecte a f .

3.2 Sigui $\varphi: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ l'aplicació donada per $\varphi((x, y, z), (x', y', z')) = xx' + xy' + x'y + 2yy' + yz' + y'z + 3zz'$.

- (a) Demostreu que φ defineix un producte escalar a $\mathbb{R}^3$ i calculeu el subespai ortogonal $F^\perp$ del subespai $F = \{(x, y, z) \mid 5x + 8y + 5z = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$.
- (b) Trobeu una base ortonormal respecte a aquest producte escalar formada per vectors de F i de $F^\perp$.

3.3 Sigui E un espai vectorial de dimensió 3 sobre $\mathbb{R}$ i sigui $\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal amb matriu

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

en una base e_1, e_2, e_3 .

- (a) Demostreu que φ és un producte escalar i calculeu una base ortonormal de E respecte de φ .
- (b) Calculeu $F^\perp$ i $G^\perp$, subespais ortogonals de $F = \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle$ i de $G = \langle e_1, e_2 \rangle$ respectivament.

3.4 Sigui E un espai vectorial de dimensió 3 sobre $\mathbb{R}$ i sigui $\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal tal que la seva matriu en una base e_1, e_2, e_3 és

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -4 & 8 & -4 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

- (a) Demostreu que φ és un producte escalar i doneu una base ortonormal de E .
- (b) Calculeu les coordenades de $w = e_1 + e_2 + e_3$ en la base ortonormal trobada en l'apartat (a).

3.5 Suposem donada una forma bilineal $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ simètrica que satisfà les condicions

$$\begin{array}{lll} f(e_1, e_1) = 1 & f(u, e_1) = 1 & f(e_2, e_2) = 2 \\ f(u, e_2) = 1 & f(e_3, e_3) = 5 & f(v, v) = 9 \end{array}$$

on e_1, e_2, e_3 és una certa base de $\mathbb{R}^3$ i u, v són els vectors $u = 2e_1 - e_3$ i $v = e_2 - e_3$.

- (a) Demostreu que f està determinada per aquestes dades i calculeu la seva matriu en la base e_1, e_2, e_3 .
- (b) Calculeu $\langle e_1 \rangle^\perp$.

3.6 Sigui $\mathbb{R}_2[x]$ l'espai vectorial dels polinomis amb coeficients reals de grau menor o igual a 2. Definim

$$\varphi(p, q) = \int_0^1 p(x)q(x) dx.$$

Demostreu que φ és un producte escalar. Calculeu una base ortonormal de $\mathbb{R}_2[x]$ i calculeu també el subespai ortogonal del subespai generat pel polinomi $2x + 1$.

3.7 Sigui $\mathbb{R}_n[x]$ l'espai vectorial dels polinomis amb coeficients reals de grau menor o igual a n i considerem l'aplicació $f: \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$f(P, Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1).$$

- (a) Demostreu que f és un producte escalar si i només si $n \leq 2$.
- (b) Doneu una base ortonormal de $\mathbb{R}_2[x]$.

3.8 Sigui $\varphi_a: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ l'aplicació donada per

$$\varphi_a((x, y, z), (x', y', z')) = axx' + ayy' + (a - 1)zz' + xy' + yx'.$$

Trobeu tots els valors de a tals que φ_a defineix un producte escalar a $\mathbb{R}^3$.

3.9 Sigui E l'espai vectorial de les matrius $n \times n$ amb coeficients reals. Definim una aplicació $\langle \cdot, \cdot \rangle: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ per $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t)$ per a $A, B \in E$, on tr denota la traça de la matriu, és a dir, la suma dels elements de la diagonal, i B^t és la matriu transposada de B .

- (a) Demostreu que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ és un producte escalar i calculeu la seva matriu en la base canònica de E (o sigui, la base definida per les matrius tals que tots els seus coeficients són 0 llevat d'un, que és 1).
- (b) Demostreu que el conjunt F de les matrius $n \times n$ amb traça zero és un subespai de E i trobeu $F^\perp$.
- (c) Doneu una base ortonormal de F per a $n = 3$.

3.10 Siguin $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espai vectorial euclidià, F un espai vectorial real de dimensió finita i $f: F \rightarrow E$ una aplicació lineal. Demostreu que $u \cdot v = \langle f(u), f(v) \rangle$ és un producte escalar a F si i només si f és injectiva.

3.11 Sigui $e_1, \dots, e_n$ una base ortonormal d'un espai vectorial euclidià E i sigui $A = (a_i^j)$ una matriu $n \times n$ amb coeficients reals. Demostreu que els vectors columna $a_i = \sum_j a_i^j e_j$ de A , on $i = 1, \dots, n$, formen una base ortonormal de E si i només si els vectors fila $a^j = \sum_i a_i^j e_i$ de A formen una base ortonormal de E .

3.12 Siguin u, v dos vectors en un espai vectorial euclidià tals que $\|u\| = \|v\|$. Demostreu que $u + v$ i $u - v$ són vectors ortogonals.

3.13 Sigui $(E, \cdot)$ un espai vectorial euclidià.

- (a) Demostreu que $|u \cdot v| = \|u\| \|v\|$ si i només si els vectors u i v són linealment dependents.
- (b) Suposem ara que $v \neq \vec{0}$. Demostreu que $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$ si i només si $u = \lambda v$ amb $\lambda \geq 0$.

3.14 Sigui $(E, \cdot)$ un espai vectorial euclidià i considerem $u, v \in E$. Demostreu que:

- (a) $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2u \cdot v$.
- (b) $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2u \cdot v$.

3.15 Sigui E un espai vectorial euclidià i siguin $u, v \in E$. Demostreu les afirmacions següents si són certes o trobeu un contraexemple si són falses:

- (a) Si u és ortogonal a v , aleshores $\|u + xv\| \geq \|u\|$ per a tot $x \in \mathbb{R}$.
- (b) Si $\|u + xv\| \geq \|u\|$ per a tot $x \in \mathbb{R}$, aleshores u és ortogonal a v .

3.16 Siguin $F, G \subseteq E$ subespais d'un espai vectorial euclidià. Demostreu les igualtats següents:

- (a) $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
- (b) $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

3.17 Sigui E un espai vectorial euclidià i sigui $e_1, \dots, e_n$ una base de E . Sigui F el subespai de E donat per l'equació $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$. Recordeu que si la base $e_1, \dots, e_n$ és ortonormal, aleshores $(a_1, \dots, a_n)$ és un vector normal al subespai F . Demostreu que en el cas general, anomenant G a la matriu de Gram en la base $e_1, \dots, e_n$, el producte de la matriu $\text{adj}(G)$ dels adjunts de G amb la matriu columna dels a_i és un vector normal a F .

3.18 Sigui E un espai vectorial euclidià orientat de dimensió 3 i sigui $u \in E$ vector no nul. Demostreu que l'aplicació $f: E \rightarrow E$ donada per $f(x) = u \wedge x$ és lineal. Calculeu el nucli i la imatge de f en termes de u .

3.19 Sigui E un espai vectorial euclidià orientat de dimensió 3 i siguin $u, v \in E$ vectors linealment independents.

- (a) Demostreu que l'aplicació $f: E \rightarrow E \times E$ donada per $f(x) = (u \wedge x, v \wedge x)$ és lineal i injectiva.
- (b) Demostreu que la imatge de f està continguda en el subespai $F \subset E \times E$ donat per

$$F = \{(u', v') \in E \times E \mid u' \cdot u = 0, v' \cdot v = 0, u' \cdot v + v' \cdot u = 0\}.$$

- (c) Deduïu dels apartats anteriors que $\text{Im}(f) = F$.

3.20 Donat un espai vectorial euclidià orientat de dimensió 3, demostreu les relacions següents:

- (a) $\det(u, u \wedge v, u \wedge w) = (u \cdot u) \det(u, v, w)$ per a qualssevol $u, v, w \in E$.
- (b) $\det(u \wedge w_1, u \wedge w_2, u \wedge w_3) = 0$ per a qualssevol $u, w_1, w_2, w_3 \in E$.

3.21 Sigui E un espai vectorial euclidià orientat de dimensió 3. Sigui e_1, e_2, e_3 una base de E i definim

$$u_1 = (e_2 \wedge e_3) \wedge e_1, \quad u_2 = (e_3 \wedge e_1) \wedge e_2, \quad u_3 = (e_1 \wedge e_2) \wedge e_3.$$

- (a) Demostreu que $\dim\langle u_1, u_2, u_3 \rangle \leq 2$. (Indicació: useu la identitat de Jacobi.)
- (b) Demostreu que $\dim\langle u_1, u_2, u_3 \rangle = 1$ si i només si exactament un dels vectors u_i és el vector zero. (Indicació: useu la fórmula $(u \wedge v) \wedge w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u$.)
- (c) Demostreu que si $\dim\langle u_1, u_2, u_3 \rangle = 2$ aleshores

$$(e_3 \cdot e_1)(e_3 \cdot e_2)(e_1 \wedge e_2) + (e_1 \cdot e_2)(e_1 \cdot e_3)(e_2 \wedge e_3) + (e_2 \cdot e_1)(e_2 \cdot e_3)(e_3 \wedge e_1)$$

és una base de $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle^\perp$.

3.22 Siguin u_1, u_2, u_3 tres vectors d'un espai vectorial euclidià orientat de dimensió 3. Definim els vectors

$$v_1 = u_2 \wedge u_3, \quad v_2 = u_3 \wedge u_1, \quad v_3 = u_1 \wedge u_2.$$

(a) Demostreu que $\det(v_1, v_2, v_3) = \det(u_1, u_2, u_3)^2$.

(b) Demostreu que

(i) $\dim\langle u_1, u_2, u_3 \rangle \leq 1 \Leftrightarrow \dim\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = 0$;

(ii) $\dim\langle u_1, u_2, u_3 \rangle = 2 \Leftrightarrow \dim\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = 1$;

(iii) $\dim\langle u_1, u_2, u_3 \rangle = 3 \Leftrightarrow \dim\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = 3$.

3.23 Sigui E un espai vectorial euclidià orientat de dimensió 3 i siguin e_1, e_2 dos vectors unitaris linealment independents tals que $e_1 \cdot e_2 = 1/2$. Considerem l'aplicació $f: E \rightarrow E$ definida per

$$f(v) = v \wedge (e_1 \wedge e_2) + (v \cdot (e_1 \wedge e_2)) e_1 \wedge e_2.$$

(a) Demostreu que f és lineal.

(b) Demostreu que $\det(f) = \|e_1 \wedge e_2\|^4$.

3.24 Sigui E un espai vectorial euclidià orientat de dimensió 3. Sigui e_1, e_2, e_3 una base de E orientada positivament i sigui G la matriu de Gram corresponent. Sigui u_1, u_2, u_3 una altra base ortonormal positiva de E .

(a) Demostreu que $\det_{u_1, u_2, u_3}(e_1, e_2, e_3) = \sqrt{\det(G)}$.

(b) Deduïu que per a qualssevol $u, v, w \in E$ es compleix $(u \wedge v) \cdot w = \sqrt{\det(G)} \det_{e_1, e_2, e_3}(u, v, w)$.

(c) Demostreu que la matriu de canvi de base de $e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1, e_1 \wedge e_2$ a e_1, e_2, e_3 és $\sqrt{\det(G)} G^{-1}$.