

4. Espais afins euclidians

4.1 Considerem en un pla afí euclidià una referència $\{O; e_1, e_2\}$ on $\widehat{e_1 e_2} = 60^\circ$ i els vectors e_1, e_2 són unitaris. Considerem també la recta $r : 2x + y - 1 = 0$ i el punt $p = (1, 1)$.

(a) Trobeu la recta que passa per p i és perpendicular a r .

(b) Calculeu la distància $d(p, r)$.

4.2 Sigui $\mathbb{A}$ un espai afí euclidià de dimensió 3. Calculeu les coordenades de la projecció ortogonal del punt $(1, -2, 3)$ sobre el pla $x - y + 2z = 0$ suposant que tenim en $\mathbb{A}$ una referència

(a) ortonormal;

(b) de vectors unitaris que formen entre ells angles de 60° .

Trobeu en els dos casos la distància del punt al pla.

4.3 Sigui $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ una referència d'un espai afí euclidià de dimensió 3, de la qual se sap que tots tres vectors són unitaris, e_1 i e_2 són ortogonals i la recta que passa per O i $(1, 0, -2)$ és ortogonal al pla $\pi : 2y + 3z + d = 0$. Determineu l'angle que formen els altres vectors de la base i el valor de d perquè la distància del punt $(1, 1, 1)$ al pla π sigui $\frac{1}{2}$.

4.4 Considerem en un espai afí euclidià de dimensió 3 una referència $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ on $\widehat{e_1 e_2} = \widehat{e_1 e_3} = \widehat{e_2 e_3} = 60^\circ$ i els vectors e_1, e_2, e_3 són unitaris. Considerem també les rectes

$$r : x = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3}, \quad s : \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=2 \end{cases}$$

Trobeu el cosinus de l'angle que formen les rectes r i s .

4.5 En un espai afí euclidià de dimensió 3 tenim dues rectes que, en una referència ortonormal, tenen les equacions

$$r : \begin{cases} x+z=0 \\ y=-2 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x=1 \\ y-z+3=0 \end{cases}$$

(a) Busqueu les equacions de la perpendicular comú i les seves interseccions amb r i s .

(b) Busqueu les rectes paral·leles a la perpendicular comú que tallen r i disten $\sqrt{\frac{3}{2}}$ de s . Busqueu també els seus punts de tall amb r .

4.6 Donat un sistema de coordenades ortonormal en un espai euclidià de dimensió 3, considerem el tetràedre de vèrtexs $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (1, 2, 0)$ i $D = (1, 1, 1)$. Determineu el pla que conté la perpendicular comú a AC i BD i passa pel simètric de A respecte del pla BCD .

4.7 Donat un sistema de coordenades ortonormal en un espai euclidià de dimensió 3, considerem la recta $r : \{x+y=0, z=1\}$, el pla $\pi : \{z=0\}$ i el punt $p = (1, 1, 0)$ d'aquest pla. Trobeu les distàncies $d(r, s)$ entre la recta r i les rectes s del pla π que passen pel punt p .

4.8 En un espai afí euclidià de dimensió 3 tenim tres rectes situades en els plans coordenats. Suposem que, en una referència ortonormal, les seves equacions són

$$r : \begin{cases} x = az + p \\ y = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} y = bz + q \\ x = 0 \end{cases} \quad t : \begin{cases} cx + dy = m \\ z = 0 \end{cases}$$

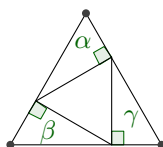
Busqueu quines condicions han de complir els paràmetres a, p, b, q, c, d, m , per tal que r , s i t siguin les projeccions ortogonals sobre els plans coordenats d'una mateixa recta de l'espai.

- 4.9 (a) Demostreu que les medians d'un triangle es tallen en un punt (*baricentre*).
 (b) Demostreu que les altures d'un triangle es tallen en un punt (*ortocentre*).
 (c) Demostreu que les mediatrises d'un triangle es tallen en un punt (*circumcentre*).
- 4.10 (a) Donades dues rectes que es tallen en un pla afí euclidià, demostreu que el lloc geomètric dels punts que equidisten de les rectes r i s és un parell de rectes perpendiculars, que anomenarem *bisectrius* de r i s .
 (b) Si $r = a + \langle u \rangle$ i $s = a + \langle v \rangle$, on u i v són vectors unitaris, demostreu que les seves bisectrius són les rectes $a + \langle u + v \rangle$ i $a + \langle u - v \rangle$.
 (c) Si A, B, C són els vèrtexs d'un triangle, direm que les rectes

$$A + \left\langle \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|} \right\rangle, \quad B + \left\langle \frac{\overrightarrow{BA}}{\|\overrightarrow{BA}\|} + \frac{\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|} \right\rangle, \quad C + \left\langle \frac{\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\|} + \frac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|} \right\rangle$$

són les *bisectrius interiors* del triangle. Demostreu que les tres bisectrius interiors d'un triangle es tallen en un punt (*incentre*).

- 4.11 Donat un triangle equilàter ABC de costat 1, trobeu tots els triangles inscrits $A'B'C'$ tals que els angles α, β, γ indicats en la figura siguin rectes:



- 4.12 Donats tres punts linealment independents de $\mathbb{R}^3$, demostreu que la intersecció dels plans que passen per un dels punts i són perpendiculars a la recta determinada pels altres dos és una recta perpendicular al pla que conté els tres punts.
- 4.13 (a) En un pla afí euclidià es consideren dos punts diferents p i q . Demostreu que les rectes que equidisten d'ambdós punts són les rectes que o bé són paral·leles a la recta pq o bé passen pel punt mig de p i q .
 (b) En un pla afí euclidià es consideren tres punts no alineats p_1, p_2 i p_3 . Trobeu totes les rectes del pla que equidisten d'aquests tres punts.
- 4.14 Siguin A i B dos vèrtexs diametralment oposats d'un cub, i siguin M i N els punts mitjos de dues arestes paral·leles que no passen per A ni per B . Comproveu que els punts A, B, M i N són coplanaris i calculeu l'àrea del polígon $ABMN$ en funció de la longitud de l'aresta del cub.
- 4.15 Demostreu que el lloc geomètric de les projeccions d'un punt P de l'espai afí euclidià de dimensió 3 als plans que passen per una recta donada r és una circumferència.
- 4.16 Signi $ABCD$ un tetràedre d'un espai afí euclidià amb $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = 1$, $\|\overrightarrow{AD}\| = 2$, $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$ i $\widehat{CAD} = 30^\circ$. Trobeu:
- l'altura de la cara BCD ;
 - l'angle $\widehat{ABC}$;
 - l'angle de les cares que passen per l'aresta AB ;
 - la distància entre AB i CD .

4.17 Es considera un tetràedre $ABCD$ d'un espai afí euclidià que satisfà $1 = d(A, B) = d(A, C) = d(A, D)$ i tal que $\widehat{BAC} = \pi/2$, $\widehat{BAD} = \widehat{CAD} = \pi/3$. Calculeu:

- (a) l'angle entre les arestes AD i BC ;
- (b) l'angle entre les arestes AB i DC ;
- (c) la distància entre el vèrtex D i la cara ABC .

4.18 En un espai afí euclidià es considera un tetràedre de vèrtexs A, B, C, D tals que $d(A, B) = 2$, $d(A, C) = 2$, $d(A, D) = 1$, $d(B, C) = 3$, $d(B, D) = 2$, $d(C, D) = 2$. Calculeu l'altura del vèrtex D sobre la cara ABC .

4.19 Sigui $OABC$ un tetràedre en un espai afí euclidià tal que $d(O, A) = d(O, B) = d(O, C) = 1$. Denotem $a = d(B, C)$, $b = d(A, C)$ i $c = d(A, B)$. Demostreu que l'angle diedre format pels plans OAB i OAC és recte si i només si es verifica la relació

$$\left(1 - \frac{a^2}{2}\right) = \left(1 - \frac{b^2}{2}\right) \left(1 - \frac{c^2}{2}\right).$$

4.20 Sigui $ABCD$ un tetràedre de l'espai afí euclidià $\mathbb{A}^3$ i siguin h_C i h_D les altures pels vèrtexs C i D .

- (a) Demostreu que h_C i h_D no són paral·leles.
- (b) Trobeu la perpendicular comú a h_C i h_D .
- (c) Demostreu que

$$d(h_C, h_D) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}|}{\|\overrightarrow{AB}\|}.$$

4.21 Sigui $ABCD$ un tetràedre de l'espai afí euclidià de dimensió 3.

- (a) Demostreu que si dos parells d'arestes oposades són ortogonals, el tercer també ho és.
- (b) Demostreu que si es compleix la condició anterior, les quatre altures del tetràedre es tallen.

4.22 Siguin A, B, C i D els vèrtexs d'un tetràedre regular en un espai afí euclidià de dimensió 3, i sigui l la longitud de les arestes.

- (a) Doneu la matriu del producte escalar en la referència $\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$ de l'espai.
- (b) Calculeu la distància entre dues arestes oposades del tetràedre.
- (c) Calculeu l'altura d'una cara del tetràedre.

4.23 Sigui $ABCD$ un tetràedre i sigui E l'ortocentre de la cara ABC . Demostreu que si la recta DE és ortogonal a ABC llavors els parells d'arestes oposades del tetràedre són ortogonals.