

5. Endomorfismes ortogonals i simètrics

- 5.1 Sigui E un espai vectorial euclidià de dimensió 3. Siguin e_1, e_2, e_3 tres vectors linealment independents, unitaris i tals que

$$e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_3 = e_3 \cdot e_1 = \frac{1}{2}.$$

Sigui φ l'endomorfisme determinat per $\varphi(e_1) = e_2$, $\varphi(e_2) = e_3$, $\varphi(e_3) = e_1$. Determineu l'aplicació φ^* adjunta de φ i calculeu $\varphi \circ \varphi^*$.

- 5.2 Sigui E un espai vectorial euclidià i sigui $\varphi \in \text{End}(E)$ tal que $\varphi^2 = 1_E$. Demostreu que les afirmacions següents són equivalents:

- (a) φ és ortogonal.
- (b) φ és simètric.
- (c) φ és una simetria ortogonal.

- 5.3 Sigui E un espai vectorial euclidià orientat de dimensió 3. Demostreu que:

- (a) Si $\phi \in SO(E)$ aleshores $\phi(u \wedge v) = \phi(u) \wedge \phi(v)$.
- (b) Si $\phi \in O(E) \setminus SO(E)$ aleshores $\phi(u \wedge v) = -\phi(u) \wedge \phi(v)$.

- 5.4 Sigui $f: E \rightarrow E$ un endomorfisme d'un espai vectorial euclidià amb la matriu A següent en una base en la qual el producte escalar té la matriu G :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}-1}{4} & \frac{-(1+\sqrt{3})}{4} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{3-\sqrt{3}}{4} & \frac{1-\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1+\sqrt{3}}{4} & \frac{3+\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Estudieu si f és ortogonal.

- 5.5 Sigui φ un endomorfisme d'un espai vectorial euclidià E de dimensió n i sigui φ^* el seu adjunt. Demostreu que $\varphi^* \circ \varphi$ diagonalitza en una base ortonormal i que tots els seus valors propis són nombres reals no negatius.

- 5.6 Demostreu que per a tot endomorfisme ortogonal propi φ d'un espai vectorial euclidià E de dimensió n existeix un altre endomorfisme ortogonal propi ψ que compleix $\psi^2 = \varphi$.

- 5.7 Sigui $f: E \rightarrow E$ un endomorfisme d'un espai vectorial euclidià amb matriu

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en una base donada. Demostreu que f no és ortogonal.

- 5.8 Classifiqueu els endomorfismes que en una base ortonormal tenen les matrius següents i trobeu els seus elements característics:

$$\begin{aligned} & \pm \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & -7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad \pm \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 4 & -7 \\ -1 & 8 & 4 \\ -8 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \pm \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 8 & 4 \\ 8 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & -7 \end{pmatrix} \\ & \pm \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \pm \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \pm \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- 5.9 (a) Sigui E un espai vectorial euclidià i sigui $u \in E$ un vector unitari. Demostreu que els endomorfismes

$$f(x) = x - 2(u \cdot x)u, \quad g(x) = 2(u \cdot x)u - x$$

són ortogonals. Comproveu que són simetries amb subespais de vectors fixos $\langle u \rangle^\perp$ i $\langle u \rangle$ respectivament.

- (b) Suposem que E és de dimensió 3 i que e_1, e_2, e_3 és una base ortonormal de E . Sigui $u = ae_1 + be_2 + ce_3$. Calculeu les matrius de les simetries f i g en aquesta base.

- 5.10 (a) Sigui E un espai vectorial euclidià orientat de dimensió 3 i sigui $u \in E$ un vector unitari. Demostreu que l'endomorfisme

$$g(x) = (\cos \alpha)x + (\sin \alpha)(u \wedge x) + (u \cdot x)(1 - \cos \alpha)u$$

és ortogonal. Comproveu que $g(u) = u$ i que g induïx a $\langle u \rangle^\perp$ una rotació d'angle α .

- (b) Siguin $u = (a, b, c)$ les coordenades de u en una base ortonormal e_1, e_2, e_3 . Trobeu la matriu de g en aquesta base.

- 5.11 (a) Sigui E un espai vectorial euclidià orientat de dimensió 2. Siguin u_1, u_2, v_1, v_2 vectors unitaris tals que u_1 i u_2 són linealment independents i tals que $\|u_1 - u_2\| = \|v_1 - v_2\|$. Demostreu que existeix un únic endomorfisme ortogonal φ de E tal que $\varphi(u_1) = v_1$ i $\varphi(u_2) = v_2$.

- (b) Demostreu que o bé $\widehat{u_1 u_2} = \widehat{v_1 v_2}$ i φ és una rotació amb angle $\widehat{u_1 v_1}$, o bé $\widehat{u_1 u_2} = -\widehat{v_1 v_2}$ i φ és una simetria amb eix $\langle u_1 + v_1 \rangle$.

- 5.12 (a) Demostreu que tota rotació de $SO(3)$ es pot descompondre com a producte de dues simetries especulars i que una d'elles es pot escollir arbitràriament entre els plans que contenen l'eix de la rotació.

- (b) Feu servir l'apartat anterior per estudiar el producte de:

- (i) una simetria especular i una rotació d'eix contingut en el pla de simetria;
- (ii) dues simetries axials d'eixos perpendiculars;
- (iii) dues rotacions d'eixos diferents.

- 5.13 Siguin g_1 i g_2 rotacions vectorials d'angles α i β al voltant d'eixos ortogonals de $\mathbb{R}^3$.

- (a) Estudieu $g_1 \circ g_2$ suposant que $\alpha = \beta = 60^\circ$.

- (b) Quins haurien de ser α i β per tal que $g_1 \circ g_2$ fos un gir d'eix contingut en el subespai vectorial generat pels eixos de g_1 i g_2 ?

5.14 Trobeu la composició $g_2 \circ g_1$ on g_1 és el gir d'eix $\langle(1, 1, 0)\rangle$ que envia $(1, -1, 0)$ a $(0, 0, \sqrt{2})$ i g_2 és el gir d'eix $\langle(1, 1, 1)\rangle$ que envia $(1, -1, 0)$ a $(1, 0, -1)$.

5.15 Descomponeu l'aplicació ortogonal que en una base ortonormal té per matriu

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

en producte de dues simetries especulars i doneu les equacions dels plans de simetria.

5.16 En una base e_1, e_2 d'un espai euclidià de dimensió 2, una rotació f donada té per matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Determineu l'angle de la rotació f , l'angle que formen els vectors e_1, e_2 i la raó $\frac{\|e_2\|}{\|e_1\|}$.

5.17 Determineu el subgrup de $O(2)$ de les aplicacions que deixen invariant el conjunt format per dos subespais de dimensió 1 ortogonals. Feu el mateix amb dos subespais de dimensió 1 no ortogonals.