

6. Desplaçaments

- 6.1 En un espai afí euclidià de dimensió 3 considerem l'afinitat f que en un sistema de referència ortonormal té equacions

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 5 & 6 & \sqrt{3} \\ -6 & 4 & 2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -2\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Demostreu que f és un desplaçament, classifiqueu-lo i determineu-ne els elements geomètrics característics.

- 6.2 (a) Demostreu que l'aplicació $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ d'un espai afí euclidià de dimensió 3 en ell mateix donada en una referència ortonormal per les equacions

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

és un desplaçament. Classifiqueu-lo i descriu-ne els seus elements geomètrics característics.

- (b) Classifiqueu f^{2016} i f^{2017} .

- 6.3 Classifiqueu els desplaçaments següents de l'espai afí euclidià de dimensió 3 les equacions dels quals estan donades en un sistema de referència ortonormal, i descriu-ne els elements geomètrics característics:

$$\begin{cases} x^* = (4/9)x - (7/9)y + (4/9)z - (2/9) \\ y^* = -(1/9)x + (4/9)y + (8/9)z + (2/9) \\ z^* = -(8/9)x - (4/9)y + (1/9)z + (1/9) \end{cases} \quad \begin{cases} x^* = (\sqrt{2}/2)x + (\sqrt{2}/2)y \\ y^* = z + 1 \\ z^* = (\sqrt{2}/2)x - (\sqrt{2}/2)y - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^* = (4/9)x + (4/9)y - (7/9)z + (1/9) \\ y^* = -(1/9)x + (8/9)y + (4/9)z + (5/9) \\ z^* = -(8/9)x + (1/9)y - (4/9)z \end{cases} \quad \begin{cases} x^* = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{1}{3} \\ y^* = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + 1 \\ z^* = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + \frac{2}{3} \end{cases}$$

- 6.4 Sigui $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ una referència d'un espai afí euclidià tal que la matriu del producte escalar en la base e_1, e_2, e_3 és

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

Demostreu que l'afinitat amb equacions

$$\begin{cases} x^* = -x + z \\ y^* = -y + z \\ z^* = z + 1 \end{cases}$$

és un desplaçament. Classifiqueu-lo i descriu-ne els seus elements geomètrics característics.

- 6.5 Sigui A un espai afí euclidià de dimensió 2. Considerem la família d'afinitats que en un sistema de referència ortonormal tenen per equacions

$$\begin{aligned}x^* &= cy + a \\ y^* &= x + b\end{aligned}$$

on $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- (a) Trobeu per a quins valors dels paràmetres són desplaçaments i estudieu-los.
 - (b) Trobeu els valors dels paràmetres de l'apartat anterior per als quals $\min_{p \in A} d(p, p^*) = \sqrt{2}$.
 - (c) Trobeu el lloc geomètric de les imatges d'un punt qualsevol per tots els desplaçaments de l'apartat (b).
- 6.6 En un sistema de referència orientat $\{P; e_1, e_2\}$ en el qual la base està formada per vectors unitaris que formen un angle de 60° , doneu les equacions del gir de centre $(1, 1)$ i angle 30° .
- 6.7 A l'espai afí euclidià orientat de dimensió 3, trobeu la matriu ortogonal corresponent a la rotació de 60° respecte de l'eix que en una referència ortonormal s'expressa com $x = 1, y = z$ considerant l'orientació positiva de l'eix amb el vector $(0, 1, 1)$.

- 6.8 Considerem a l'espai afí euclidià de dimensió 3 la simetria axial f respecte de la recta

$$r : \quad \frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = z,$$

la simetria central g respecte del punt $P = (0, 1, -1)$ i la simetria especular h respecte del pla perpendicular a r que passa per P . Estudieu la composició $h \circ g \circ f$.

- 6.9 Considerem en un espai afí euclidià de dimensió tres un sistema de referència ortonormal i les rectes que en aquesta referència tenen equacions $r : x = y = z$ i $s : x = 0, y = 1$. Siguin S_r, S_s les simetries axials respecte de les rectes r i s . Classifiqueu la composició $S_r \circ S_s$ i determineu els seus elements característics.
- 6.10 Considerem els plans que, en una certa referència ortonormal de l'espai afí euclidià de dimensió 3, tenen equacions
- $$\pi : \quad x + y + z = 0, \quad \pi' : \quad x + y = 2.$$
- Trobeu els elements geomètrics característics i doneu les equacions de la composició $S_{\pi'} \circ S_\pi$ de les simetries especulars respecte dels plans π i π' , i classifiqueu-la.
- 6.11 Siguin A, B, C, D, E els vèrtexs d'una piràmide recta de base quadrada $ABCD$ de costat 1 i alçària 2. Siguin s_1 i s_2 les simetries axials d'eixos EA i EB respectivament. Estudieu $s_2 \circ s_1$.

- 6.12 Estudieu la composició de les quatre simetries respecte dels costats consecutius d'un rectangle.

- 6.13 Siguin l_1, l_2, l_3 rectes del pla afí euclidià. Denotem per s_i la simetria axial d'eix l_i .

- (a) Demostreu que, si l_1 i l_2 són paral·leles, llavors $s_2 \circ s_1$ és una translació. Determineu el vector d'aquesta translació.
- (b) Demostreu que si l_1 i l_2 són concurrents, llavors $s_2 \circ s_1$ és un gir. Determineu el centre i l'angle.
- (c) Demostreu que si l_1, l_2 i l_3 són paral·leles o concurrents, llavors $s_3 \circ s_2 \circ s_1$ és una simetria axial.

- 6.14 Classifiqueu la composició de dues simetries especulars de l'espai afí i descriuiu els seus elements geomètrics característics.
- 6.15 Classifiqueu la composició de dues simetries axials de l'espai afí respecte de dues rectes no paral·leles i descriuiu els seus elements geomètrics característics.
- 6.16 Sigui ABC un triangle del pla afí euclidià de costats $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = 4$ i $\|\overrightarrow{BC}\| = 3$. Sigui f el desplaçament invers tal que $f(A) = C$, $f(B) = A$.
- (a) Demostreu que f és una simetria axial seguida d'una translació de vector paral·lel a l'eix de simetria.
 - (b) Trobeu l'eix de la simetria i el vector de la translació.
- 6.17 Sigui $ABCD$ un rectangle del pla afí euclidià.
- (a) Trieu una referència i determineu les equacions de les afinitats f tals que $f(A) = B$ i $f(B) = C$.
 - (b) En quins casos hi ha desplaçaments en aquesta família d'afinitats? En cas que n'hi hagi, classifiqueu-los i doneu-ne els elements geomètrics característics.
- 6.18 Sigui $ABCD$ un quadrat del pla afí euclidià. Sigui $O = AC \cap BD$ la intersecció de les seves diagonals i sigui M el punt mig de A i B . Considerem la família d'afinitats del pla f tals que $f(A) = O$ i $f(B) \in OM$. Demostreu que en aquesta família hi ha 4 desplaçaments i classifiqueu-los.
- 6.19 Donat un tetràedre regular $ABCD$ de $\mathbb{R}^3$, demostreu que existeix una única afinitat f tal que $f(A) = B$, $f(B) = C$, $f(C) = D$ i $f(D) = A$. Demostreu que és un desplaçament i classifiqueu-lo.
- 6.20 Donats un punt p i una recta r tal que $p \notin r$ del pla euclidià orientat, considerem tots els girs d'angle 60° que transformen p en un punt de r . Trobeu el lloc geomètric dels centres de gir.
- 6.21 Siguin r i s dues rectes paral·leles del pla afí euclidià. Trobeu el lloc geomètric dels centres dels girs que transformen r en s .
- 6.22 Descriuiu el grup dels desplaçaments del pla que deixen fix cadascun dels conjunts següents:
- (a) un triangle (isòsceles, equilàter);
 - (b) un rectangle (un quadrat);
 - (c) dos punts.
- 6.23 Descriuiu el grup dels desplaçaments de l'espai que deixen fix cadascun dels conjunts següents:
- (a) un rectangle (un quadrat) i un punt no situat al mateix pla;
 - (b) un pla i dos punts diferents no situats sobre el pla;
 - (c) dos plans ortogonals.
- 6.24 En un espai afí euclidià es consideren donats un pla π i una recta r no paral·lela ni perpendicular al pla π . Determineu i classifiqueu els desplaçaments f tals que $f(r) = r$ i $f(\pi) = \pi$.