

2. Espais afins

2.1 Fixada una referència $\{P; e_1, e_2, e_3\}$ a l'espai afí real de dimensió 3, considerem les rectes d'equacions

$$r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - 2y = 1, \end{cases} \quad s : \begin{cases} y + z = 0 \\ x - 3y + z = 1, \end{cases} \quad t : \begin{cases} x + 3z = 1 \\ x - y + 2z = 1. \end{cases}$$

- (i) Determineu les seves posicions relatives dues a dues.
- (ii) Trobeu la varietat suma de cada parell de rectes.
- (iii) Trobeu la intersecció de cadascuna d'aquestes varietats amb l'altra recta.
- (iv) Trobeu l'equació del feix de plans que passen per t .
- (v) Determineu quin pla d'aquest feix és paral·lel a r .

2.2 Fixada una referència $\{P; e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ a l'espai afí real de dimensió 5, considerem les rectes d'equacions:

$$r : x_1 = 2x_2 - 1 = -x_3 = x_4 = x_5, \quad s : \frac{x_1 - 1}{3} = \frac{x_2}{5} = x_3 - 2 = \frac{x_4 + 1}{7} = \frac{-x_5}{4}.$$

Trobeu les equacions de la varietat suma.

2.3 Siguin V_1 i V_2 dues varietats lineals que es tallen i que són paral·leles a una tercera varietat V . Demostreu que la varietat suma $V_1 + V_2$ i la varietat intersecció $V_1 \cap V_2$ són paral·leles a V .

2.4 Siguin $V_1 = a + F$ i $V_2 = b + G$ dues varietats lineals d'un espai afí A i sigui E l'espai vectorial associat a A . De les implicacions següents, demostreu les que siguin certes i doneu un contraexemple de les que siguin falses:

- (a) $E = F + G \Rightarrow A = V_1 \vee V_2$.
- (b) $A = V_1 \vee V_2 \Rightarrow E = F + G$.
- (c) $F \cap G = \{\vec{0}\} \Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{\text{un punt}\}$.
- (d) $V_1 \cap V_2 = \{\text{un punt}\} \Rightarrow F \cap G = \{\vec{0}\}$.
- (e) $E = F \oplus G \Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{\text{un punt}\}$.

2.5 Siguin r i s dues rectes de l'espai afí real de dimensió 3 i sigui P un punt que no és a cap de les dues rectes. Estudieu si existeixen rectes t (i quantes n'existeixen) que passin per P i tallin r i s . Discutiu tots els casos possibles: que r i s es creuin, que es tallin, que siguin paral·leles diferents o que coincideixin.

- 2.6 Donades dues rectes que es creuen a l'espai afí de dimensió 3 i un pla que no és paral·lel a cap de les rectes, determineu el lloc geomètric dels punts mitjos dels segments que tenen un extrem a cada recta i són paral·lels al pla.
- 2.7 Donada una recta r del pla i dos punts $a, b \notin r$, determineu el lloc geomètric dels punts p tals que el quart vèrtex del paral·lelogram que té com a costats $\vec{pa}$ i $\vec{pb}$ és sobre la recta r .
- 2.8 Donades dues rectes r, s de l'espai afí real de dimensió 3, trobeu el lloc geomètric dels punts mitjos dels parells de punts a, b amb $a \in r$ i $b \in s$.
- 2.9 (Setembre 1999) Donades dues rectes paral·leles r, s del pla afí real, determineu el lloc geomètric dels baricentres dels triangles ABC tals que $A \in r$ i que el punt mig del costat BC és sobre la recta s .
- 2.10 (Juny 1999) Siguin $H_1, \dots, H_n$ hiperplans de l'espai afí real de dimensió n . Demostreu que si $\dim(H_1 \cap \dots \cap H_n) = 0$, llavors per a tot $0 \leq i \leq n$ es té $\dim(H_1 \cap \dots \cap H_i) = n - i$.
- 2.11 (Gener 2000) Siguin a_1, a_2, a_3, a_4 punts del pla afí real tals que no n'hi ha tres sobre una mateixa recta. Designem per g, b_1, b_2, b_3, b_4 els baricentres de $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \{a_2, a_3, a_4\}, \{a_1, a_3, a_4\}, \{a_1, a_2, a_4\}$ i $\{a_1, a_2, a_3\}$, respectivament. Demostreu que les rectes b_1b_3 i b_2b_4 es tallen a g si i només si a_1, a_2, a_3, a_4 formen un paral·lelogram de diagonals a_1a_3 i a_2a_4 .
- 2.12 Escolliu un sistema de referència $\{p_0, p_1, p_2\}$ en el pla afí real i dibuixeu els punts que tenen les coordenades baricèntriques següents:

$$\begin{array}{lll} a_1 = (0, 1, 0) & a_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}) & a_3 = (0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ a_4 = (-1, 0, 2) & a_5 = (\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, -1) & a_6 = (\frac{5}{3}, -1, \frac{1}{3}) \\ a_7 = (3, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}) & a_8 = (1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & a_9 = (-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, 3). \end{array}$$

- 2.13 Siguin $a \neq b$ dos punts del pla afí real. Dibuixeu els punts p_i , per a $i = 1, \dots, 9$, tals que

$$\begin{array}{lll} (p_1, a, b) = 3 & (p_2, a, b) = 1 & (p_3, a, b) = 0 \\ (a, p_4, b) = 3 & (a, p_5, b) = 1 & (a, p_6, b) = 0 \\ (a, b, p_7) = 3 & (a, b, p_8) = 1 & (a, b, p_9) = 0. \end{array}$$

(Atenció! No tots els casos són possibles.)

2.14 (Maig 1999)

- (i) Sigui P un punt del pla afí real i sigui r una recta que no passi per P . Fixat $\lambda \in \mathbb{R}$, trobeu el lloc geomètric dels punts Q tals que $(Q, A, P) = \lambda$, on A varia al llarg de r .
- (ii) Fixat un sistema de referència $\{O; e_1, e_2\}$ del pla, considerem les rectes que tenen per equacions

$$r : x - 2y + 3 = 0, \quad s : 2x + y - 4 = 0.$$

Trobeu els punts Q tals que $(Q, A, O) = \frac{1}{2}$ i $(Q, B, O) = 2$, amb $A \in r$ i $B \in s$.

2.15 Sigui ABC un triangle i siguin A' , B' i C' punts situats sobre les rectes BC , AC i AB , respectivament. Demostreu que els triangles ABC i $A'B'C'$ tenen el mateix baricentre si i només si $(A', B, C) = (B', C, A) = (C', A, B)$.

2.16 Siguin a, b, c tres punts alineats i siguin a', b', c' punts també alineats, en una altra recta. Supposem que $(a, b, c) = (a', b', c') = r$. Siguin a'', b'', c'' punts tals que

$$(a, a', a'') = (b, b', b'') = (c, c', c'').$$

- (i) Demostreu que a'', b'', c'' coincideixen o estan alineats.
- (ii) Calculeu la raó simple (a'', b'', c'') .

2.17 Siguin $p_1, \dots, p_n$ punts d'un espai afí.

- (i) Comproveu amb un exemple que, en general, l'expressió $O + \sum_i \lambda_i \vec{Op_i}$ depèn del punt O . (Indicació: preneu $p_1 = A$, $p_2 = B$, $A \neq B$ i $O = A$, $O = B$.)
- (ii) Demostreu que $O + \sum_i \lambda_i \vec{Op_i}$ no depèn de O si $\sum_i \lambda_i = 1$. En aquest cas, i només en aquest cas, l'expressió anterior s'escriu com $\sum_i \lambda_i p_i$.

2.18 Siguin $a_1, \dots, a_n$ punts d'un espai afí. Diem que un punt p és el *baricentre* del conjunt $a_1, \dots, a_n$ si verifica $\vec{pa_1} + \dots + \vec{pa_n} = \vec{0}$. Demostreu que en un espai real o complex el baricentre sempre existeix i és únic. És cert això en un espai sobre un cos qualsevol?

2.19 Siguin $V = p + F$ i $W = q + F$ dos subespais afins d'un espai afí A . Quines de les implicacions següents són certes?

- (i) $p \neq q \Rightarrow V \neq W$.
- (ii) $V \cap W \neq \emptyset \Rightarrow V = W$.

2.20 Demostreu que un subconjunt d'un espai afí és un subespai afí si i només si, per a qualsevol parell de punts del subconjunt, aquest conté la recta que determinen.

2.21 Sigui H un hiperplà de $\mathbb{A}^n$. Demostreu que tota varietat lineal que no talli H és paral·lela a H .

2.22 Siguin $A_i = (a_1^i, \dots, a_m^i) \in \mathbb{A}^m$, $i = 1, \dots, n$, les coordenades de n punts en una referència donada. Demostreu que el baricentre d'aquests punts té coordenades

$$\left(\frac{a_1^1 + \dots + a_1^n}{n}, \dots, \frac{a_m^1 + \dots + a_m^n}{n} \right).$$

2.23 Siguin a, b, c i d punts del pla tals que no n'hi ha tres d'alineats. Demostreu que les condicions següents són equivalents:

(i) Les rectes $a \vee b$, $c \vee d$ i, respectivament, les rectes $a \vee d$, $b \vee c$, són paral·leles (és a dir, a, b, c determinen un paral·lelogram).

(ii) $\vec{ab} = \vec{dc}$.

(iii) $\vec{ad} = \vec{bc}$.

(iv) $a + \frac{1}{2} \vec{ac} = b + \frac{1}{2} \vec{bd}$ (és a dir, les diagonals es tallen en els punts mitjos respectius).

2.24 Siguin a_1, a_2, a_3 els vèrtexs d'un tetràedre. Sigui m_{ik} el punt mig de a_i, a_k , i sigui b_i el baricentre de a_j, a_k, a_l , on $i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4\}$. Comproveu que les rectes $a_1 \vee b_1, a_2 \vee b_2, a_3 \vee b_3, a_4 \vee b_4, m_{12} \vee m_{34}, m_{13} \vee m_{24}$ i $m_{14} \vee m_{23}$ passen totes per un punt.

2.25 Siguin A, B, C els vèrtexs d'un triangle del pla afí i sigui r una recta que talla les rectes $A \vee B, B \vee C, C \vee A$ en els punts P, Q, R , respectivament. Demostreu que els punts I, J, K determinats per

$$\vec{AI} = \vec{AP} + \vec{AR}, \quad \vec{BJ} = \vec{BQ} + \vec{BP}, \quad \vec{CK} = \vec{CR} + \vec{CQ}$$

están alineats.

2.26 En un espai afí de dimensió tres tenim dues rectes que, en una referència afí, tenen les equacions:

$$r : \begin{cases} x + z = 0 \\ y = -2, \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 1 \\ y - z + 3 = 0. \end{cases}$$

Trobeu la recta t que passa pel punt $(1, 1, 0)$ i talla r i s .

2.27 Sigui A un espai afí de dimensió 4 sobre $\mathbb{R}$. En un sistema de referència $\{p; u_1, u_2, u_3, u_4\}$ tenim les varietats

$$V_1 : \begin{cases} x + y - z + t = 1 \\ x - 2y + t = 0, \end{cases} \quad V_2 : 2x + 4y - 2z + t = 1,$$

$$V_3 = \langle (1, 1, 1, 0), (0, 0, 2, 1) \rangle, \quad V_4 = \langle (-4, -3, -9, 0), (2, -1, 1, 0), (1, 0, 1, 0) \rangle.$$

- (i) Determineu-ne les dimensions.
- (ii) Doneu els seus subespais vectorials associats.
- (iii) Busqueu $V_1 \cap V_2$, $V_3 \cap V_4$, $V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4$, $V_1 \vee V_2$, $V_3 \vee V_4$, $V_1 \vee V_2 \vee V_3 \vee V_4$.
- (iv) Determineu una varietat V_5 de dimensió 2 que passi per p i sigui paral·lela a $V_1 \cap V_2$.

2.28 Sigui A un espai afí de dimensió 4 sobre $\mathbb{R}$. En una referència afí donada, considerem:

$$r : x = y = z = t, \quad \pi_{(a,b)} : \begin{cases} ax + y + z + t = b \\ x + by - z + t = a. \end{cases}$$

Estudieu les posicions relatives de la recta r i el pla $\pi_{(a,b)}$ segons els diferents valors de a i b .

2.29 Donades les rectes

$$r : \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0, \end{cases} \quad s : \begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x + 3z = 1, \end{cases} \quad t : \begin{cases} x + 2z = 3 \\ 2x - y = 1, \end{cases}$$

trobeu la recta que les talla en tres punts $P \in r$, $Q \in s$, $R \in t$ tals que Q és el punt mig de P i R .

2.30 (Juny 1996) Donades tres rectes r , s i t de $\mathbb{A}^3$ de manera que els seus vectors directors són independents, demostreu que existeix una única recta l' paral·lela a t i tal que $r \cap l' \neq \emptyset$, $s \cap l' \neq \emptyset$.

2.31 (*Teorema de Thales*) Demostreu que la projecció paral·lela entre rectes conserva la raó simple.

2.32 Siguin r i s dues rectes del pla i O un punt exterior a totes dues. Demostreu que la projecció de r sobre s des de O conserva la raó simple si i només si r i s són paral·leles.

2.33 (*Teorema de Ceva*) Siguin A , B , C tres punts independents de $\mathbb{A}^2$ i siguin $A' \in BC$, $B' \in AC$, $C' \in AB$ punts diferents de A , B , C . Proveu que les rectes AA' , BB' , CC' són concurrents si i només si

$$(A', B, C) \cdot (B', C, A) \cdot (C', A, B) = -1.$$

- 2.34 (*Teorema de Menelao*) Siguin A, B, C punts independents de $\mathbb{A}^2$ i siguin $A' \in BC$, $B' \in AC$, $C' \in AB$ punts diferents de A, B, C . Proveu que els punts A', B', C' estan alineats si i només si

$$(A', B, C) \cdot (B', C, A) \cdot (C', A, B) = 1.$$

- 2.35 (Setembre 2003) En un pla afí es considera un quadrilàter $ABCD$. Proveu que els punts mitjos dels costats AB, BC, CD i DA formen un paral·lelogram.

- 2.36 (Juny 2003) En un pla afí es considera un paral·lelogram $ABCD$ de diagonals AC i BD . Sigui P el punt mig del costat DC i sigui Q el punt mig del costat BC . Demostreu que les rectes AP i AQ divideixen la diagonal BD en tres parts iguals.