

1. Espais afins

- 1.1 Siguin a, b, c i d punts d'un espai afí. Demostreu que les condicions següents són equivalents i que, sota aquestes condicions, els quatre punts són coplanaris:

a) $\vec{ab} + \vec{ad} = \vec{ac}$;

b) $\vec{ab} = \vec{dc}$;

c) $\vec{ad} = \vec{bc}$;

d) $a + \frac{1}{2}\vec{ac} = b + \frac{1}{2}\vec{bd}$;

e) $c = a + \vec{ab} + \vec{ad}$.

Nota: Quan quatre punts a, b, c i d són diferents i no n'hi ha tres d'alineats i se satisfan aquestes condicions, es diu que els quatre punts formen un *paral·lelogram* de costats ab, bc, cd i da . La quarta condició ens diu que els paral·lelograms estan caracteritzats pel fet que les diagonals es tallen en els seus punts mitjos.

- 1.2 Siguin $p_1, \dots, p_n$ punts d'un espai afí i sigui σ una permutació del conjunt d'índexs $\{1, 2, \dots, n\}$. Demostreu la relació $\vec{p_1 p_{\sigma(1)}} + \dots + \vec{p_n p_{\sigma(n)}} = 0$.

- 1.3 Siguin $\{p_1, \dots, p_N\}$ i $\{q_1, \dots, q_N\}$ dos conjunts de punts en un espai afí i siguin P i Q els seus baricentres respectius. Expresseu la suma $\vec{p_1 q_1} + \dots + \vec{p_N q_N}$ en funció de $\vec{PQ}$.

- 1.4 En un pla afí es considera un quadrilàter $ABCD$. Demostreu que els punts mitjos dels costats AB, BC, CD i DA són els vèrtexs d'un paral·lelogram. Digueu si el mateix és cert prenent ara punts A, B, C, D en un espai afí de dimensió tres.

- 1.5 En un pla afí es considera un paral·lelogram $ABCD$ de diagonals AC i BD . Sigui P el punt mig del costat DC i sigui Q el punt mig del costat BC . Demostreu que les rectes AP i AQ divideixen la diagonal BD en tres parts iguals.

- 1.6 Siguin A, B, C els vèrtexs d'un triangle d'un pla afí i sigui r una recta que talla les rectes AB, BC i CA en els punts P, Q i R respectivament. Demostreu que els punts següents estan alineats:

$$I = A + \vec{AP} + \vec{AR}, \quad J = B + \vec{BQ} + \vec{BP}, \quad K = C + \vec{CR} + \vec{CQ}.$$

- 1.7 En un pla afí considerem un triangle de vèrtexs P_1, P_2 i P_3 . Per a $i = 1, 2, 3$, sigui Q_i el punt mig de la mediana des del vèrtex P_i . Demostreu que els triangles $P_1 P_2 P_3$ i $Q_1 Q_2 Q_3$ tenen els costats paral·lels.

- 1.8 Considerem l'espai afí A^3 ordinari o estàndard ($A = \mathbb{R}^3, E = \mathbb{R}^3$). Demostreu que els conjunts de punts següents són varietats lineals. Determineu la seves dimensions, els subespais directors i un sistema d'equacions paramètriques de cadascuna d'elles.

$$V_1 = \{(x, y, z) \in A \mid x + y + z = 3\};$$

$$V_2 = \{(x, y, z) \in A \mid x - y + z = 0\};$$

$$V_3 = \{(x, y, z) \in A \mid x - y + z = 0, x - 2y = 1\};$$

$$V_4 = \{(x, y, z) \in A \mid y + z = 0, x - 3y + 2z = 2\};$$

$$V_5 = \{(x, y, z) \in A \mid x - 2y = 1, x + y - z = 2, 3x - 2z = 5\};$$

$$V_6 = \{(x, y, z) \in A \mid x + 3z = 1, x - y + 2z = 1, 3y + z = 0\}.$$

Determineu la dimensió i el subespai vectorial director de la varietat lineal intersecció $V_2 \cap V_4$.

- 1.9 Sigui H un hiperplà de $\mathbb{A}^n$. Demostreu que tota varietat lineal que no talli H és paral·lela a H .
- 1.10 Siguin $H_1, \dots, H_n$ hiperplans d'un espai afí real de dimensió n . Demostreu que si $\dim(H_1 \cap \dots \cap H_n) = 0$, aleshores per a tot $0 \leq i \leq n$ es té $\dim(H_1 \cap \dots \cap H_i) = n - i$.
- 1.11 a) Fixada una referència cartesiana en un espai afí real de dimensió 3, demostreu que quatre punts $A_i = (x_i, y_i, z_i)$, on $i = 1, 2, 3, 4$, són coplanaris si i només si

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

- b) Fixada una referència cartesiana en un espai afí real de dimensió 3, demostreu que si els quatre plans d'equacions $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$ per a $i = 1, 2, 3, 4$ tenen intersecció no buida, aleshores

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0.$$

És cert el recíproc? Justifiqueu la resposta.

- 1.12 En un espai afí de dimensió 3 tenim dues rectes que, en una referència afí, tenen les equacions

$$r : \begin{cases} x + z = 0 \\ y = -2 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 1 \\ y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

Trobeu la recta t que passa pel punt $(1, 1, 0)$ i talla r i s .

- 1.13 Sigui A un espai afí de dimensió 4 sobre $\mathbb{R}$. En una referència afí donada, considerem

$$r : x = y = z = t; \quad \pi_{(a,b)} : \begin{cases} ax + y + z + t = b \\ x + by - z + t = a \end{cases}$$

Estudieu les posicions relatives de la recta r i el pla $\pi_{(a,b)}$ segons els diferents valors de a i b .

- 1.14 Sigui A un espai afí de dimensió 4 sobre $\mathbb{R}$. En un sistema de referència $\{p; u_1, u_2, u_3, u_4\}$ tenim les varietats lineals següents:

$$V_1 : \begin{cases} x + y - z + t = 1 \\ x - 2y + t = 0 \end{cases} \quad V_2 : 2x + 4y - 2z + t = 1;$$

$$V_3 = \{(1, 1, 1, 0)\} + \{(0, 0, 2, 1)\}; \quad V_4 = \{(-4, -3, -9, 0)\} + \{(2, -1, 1, 0)\} + \{(1, 0, 1, 0)\}.$$

- a) Determineu-ne les dimensions.
 b) Doneu els seus subespais vectorials associats.
 c) Calculeu $V_1 \cap V_2$; $V_3 \cap V_4$; $V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4$; $V_1 + V_2$; $V_3 + V_4$; $V_1 + V_2 + V_3 + V_4$.
 d) Determineu una varietat V_5 de dimensió 2 que passi per p i sigui paral·lela a $V_1 \cap V_2$.

- 1.15 Donades les rectes

$$r : \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x + 3z = 1 \end{cases} \quad t : \begin{cases} x + 2z = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

trobeu la recta que les talla en tres punts $P \in r$, $Q \in s$, $R \in t$ tals que Q és el punt mig de P i R .

1.16 Considerem les varietats lineals següents a l'espai afí real de dimensió 4:

$$L_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^4 \mid x + y = 7, z + t = a\},$$

$$L_2 = \{(6 + b\lambda, 1 - 2\lambda, -2\lambda, -1 + b\lambda) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^4 \mid \lambda \in \mathbb{R}\},$$

on $a, b \in \mathbb{R}$. Estudieu la dimensió de les varietats lineals $L_1 + L_2$ i $L_1 \cap L_2$ en funció dels paràmetres a, b . Determineu en quins casos les varietats L_1 i L_2 es tallen, són paral·leles o una de elles està inclosa en l'altra.

1.17 Donada una recta r del pla i dos punts $a, b \notin r$, determineu el lloc geomètric dels punts p tals que el quart vèrtex del paral·lelogram que té costats pa i pb pertanyi a la recta r .

1.18 Donades dues rectes r i s de l'espai afí real de dimensió 3, trobeu el lloc geomètric dels punts mitjos dels parells de punts a, b amb $a \in r$ i $b \in s$.

1.19 En l'espai afí real A de dimensió 3 es consideren dos plans no paral·lels π_1 i π_2 i una recta r no paral·lela a cap d'ells. Descriuiu el lloc geomètric dels punts mitjos de les interseccions amb π_1 i π_2 de les rectes de l'espai paral·leles a r .

1.20 Donades dues rectes que s'encreuen a l'espai afí de dimensió 3 i un pla no paral·lel a cap de les rectes, determineu el lloc geomètric dels punts mitjos dels segments amb un extrem a cada recta i paral·lels al pla.

1.21 Donades dues rectes paral·leles r, s del pla afí real, determineu el lloc geomètric dels baricentres dels triangles ABC tals que $A \in r$ i el punt mig del costat BC pertanyi a la recta s .

1.22 Fixat un tetraedre en un espai afí i un parell d'arestes oposades del mateix, es consideren els plans paral·lels a aquest parell de rectes que no contenen cap d'elles.

a) Demostreu que aquests plans tallen les arestes restants en els vèrtexs d'un paral·lelogram.

b) Demostreu que els punts d'intersecció de les diagonals d'aquests paral·lelograms es troben sobre una recta i descriuiu-la geomètricament.

1.23 Sigui r i s dues rectes de l'espai afí real de dimensió 3 i sigui P un punt que no pertanyi a cap d'elles. Estudieu si existeixen rectes t (i quantes n'hi ha) que passin per P i tallin r i s . Discutiu els casos possibles: que r i s s'encreuin, es tallin, siguin paral·leles diferents o coincideixin.

1.24 Donades tres rectes r, s i t de $\mathbb{A}^3$ de manera que els seus vectors directors són independents, demostreu que existeix una única recta l paral·lela a t i tal que $r \cap l \neq \emptyset$, $s \cap l \neq \emptyset$.

1.25 Sigui ABC un triangle d'un pla afí. Sigui $M_0 \in A + B$ un punt qualsevol i definim els punts $M_1, \dots, M_6$ de la manera següent: siguin M_1 el punt de tall de la paral·lela a BC per M_0 amb AC , M_2 el punt de tall de la paral·lela a AB per M_1 amb BC , M_3 el punt de tall de la paral·lela a AC per M_2 amb AB , etc. Demostreu que $M_6 = M_0$.

1.26 En un espai afí real de dimensió 3 es consideren, en una referència donada, els plans $H_1 : x = 1$, $H_2 : y = 0$ i $H_3 : z = -1$. Trobeu l'equació dels plans H tals que H_1 , H_2 i H_3 tallen H en rectes que formen un triangle amb baricentre en el punt $(0, 1, 1)$.

1.27 Sigui a_1, a_2, a_3, a_4 punts del pla afí real tals que no n'hi ha tres sobre una mateixa recta. Designem per g, b_1, b_2, b_3, b_4 els baricentres de $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $\{a_2, a_3, a_4\}$, $\{a_1, a_3, a_4\}$, $\{a_1, a_2, a_4\}$ i $\{a_1, a_2, a_3\}$ respectivament. Demostreu que les rectes b_1b_3 i b_2b_4 es tallen en g si i només si a_1, a_2, a_3 i a_4 formen un paral·lelogram de diagonals a_1a_3 i a_2a_4 .

- 1.28 Siguin a, b, c tres punts d'una recta r i a', b', c' punts d'una recta s . Suposem que les dues ternes tenen la mateixa raó simple: $(a, b, c) = (a', b', c')$. Siguin a'', b'', c'' punts tals que

$$(a, a', a'') = (b, b', b'') = (c, c', c'').$$

Demostreu que a'', b'' i c'' estan alineats i calculeu la raó simple (a'', b'', c'') .

- 1.29 Sigui ABC un triangle i siguin A', B' i C' tres punts situats sobre les rectes BC, AC i AB respectivament. Demostreu que els triangles ABC i $A'B'C'$ tenen el mateix baricentre si i només si se satisfan les igualtats $(A', B, C) = (B', C, A) = (C', A, B)$.

- 1.30 En un espai afí de dimensió 3 considerem un tetràedre de vèrtexs A, B, C i D . Siguin $B' \in AB, C' \in AC$ i $D' \in AD$ punts diferents dels vèrtexs. Sigui b_A el baricentre de B, C, D ; sigui b'_A el baricentre de B', C', D' i sigui b el baricentre de A, B, C, D .

a) Demostreu que les condicions següents són equivalents:

- Els plans $B'C'D'$ i BCD són paral·lels.
- $(B', B, A) = (C', C, A) = (D', D, A)$.
- Els baricentres b, b_A i b'_A estan alineats.

b) Suposant certes les condicions de l'apartat anterior, demostreu que

$$(b_A, b'_A, b) \cdot [4(B', B, A) - 3] = 1.$$

- 1.31 Siguin A, B i C tres punts afíment independents en un pla afí. Siguin D i E dos punts de la recta que passa per B i C . Farem servir la notació P_{XY} per al punt mig de X i Y . Sigui r_1 la recta que passa per A i P_{DE} ; sigui r_2 la recta que passa per P_{AC} i P_{BE} , i sigui r_3 la recta que passa per P_{AB} i P_{CD} .

- (a) Demostreu que la igualtat $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EB}$ equival a $P_{DE} = P_{BC}$, i també equival a la igualtat de raons simples $(B, C, E) = (C, B, D)$ si E és diferent de B i C .
- (b) Demostreu que les rectes r_1, r_2 i r_3 són concurrents si i només si $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EB}$, excepte en el cas que $(B, C, E) = (C, B, D) = 3$. Què passa en aquest cas?
- (c) Trobeu quina relació hi ha entre $\overrightarrow{DE}$ i $\overrightarrow{BC}$ quan r_1, r_2, r_3 són paral·leles.

- 1.32 a) Sigui P un punt del pla afí real i r una recta que no passi per P . Fixat $\lambda \in \mathbb{R}$, trobeu el lloc geomètric dels punts Q tals que $(Q, A, P) = \lambda$ al variar A en r .
- b) Fixat un sistema de referència $\{O; e_1, e_2\}$ del pla, considerem les rectes que tenen per equacions

$$r : x - 2y + 3 = 0, \quad s : 2x + y - 4 = 0.$$

Trobeu els punts Q tals que $(Q, A, O) = \frac{1}{2}$ i $(Q, B, O) = 2$ amb $A \in r$ i $B \in s$.

- 1.33 (Teorema de Pappus) Donades dues rectes diferents no paral·leles r i s del pla afí amb $O = r \cap s$, es donen tres punts diferents A, B, C de r i tres punts diferents A', B', C' de s , tots sis diferents de O . Demostreu que els punts $M = AB' \cap A'B$, $N = AC \cap A'C$ i $P = BC' \cap B'C$ estan alineats.