

2. Afinitats

En aquesta llista d'exercicis, $\mathbb{A}^n$ denota un espai afí de dimensió n amb espai vectorial associat E sobre un cos K de característica zero. Escriurem $\mathbb{A}_K^n$ quan convingui especificar el cos K .

2.1 Sigui $f: \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ una afinitat amb endomorfisme associat $\tilde{f}$. Donada una varietat lineal $L = a + F$, decideixi si les implicacions següents són certes o falses:

- (a) $f(L) = L \Rightarrow \tilde{f}(F) = F$.
- (b) $\tilde{f}(F) = F \Rightarrow f(L) = L$.

2.2 Sigui f una afinitat de $\mathbb{A}^n$. Demostreu que f és una homotècia o una translació si i només si f transforma tota recta de $\mathbb{A}^n$ en una recta paral·lela a ella.

2.3 Sigui p_1, p_2, p_3 i p_4 punts d'un pla afí real. Per a $1 \leq i \leq 4$, sigui S_i la simetria central respecte al punt p_i . Demostreu que es verifica $S_4 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1 = \text{Id}$ si i només si els punts p_i són els vèrtexs consecutius d'un paral·lelogram.

2.4 Sigui $\{p; e_1, e_2\}$ un sistema de referència en $\mathbb{A}^2$. Sigui $g: \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$ l'aplicació afí que transforma els punts

$$Q = (2, 1), N = (1, 2), M = (2, 2) \quad \text{en} \quad g(Q) = (3, 1), g(N) = (1, 3), g(M) = (3, 3).$$

Trobeu les equacions de g .

2.5 Considerem les rectes de $\mathbb{A}^2$ que en un sistema de referència tenen les equacions

$$r_1: x + y = 1; \quad r_2: x + 2y = 0; \quad r_3: 4x - y = 2.$$

Trobeu les equacions de les afinitats f tals que $f(r_1) = r_2$, $f(r_2) = r_3$, $f(r_3) = r_1$.

2.6 Sigui $f: \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ l'afinitat del pla donada per les equacions

$$\begin{aligned} x^* &= x - y + 1 \\ y^* &= x + y + 2 \end{aligned}$$

- (a) Trobeu-ne els punts fixos i les rectes invariants.
- (b) Sigui r la recta d'equació $2x + 3y = 1$. Calculeu les equacions de $f(r)$ i $f^{-1}(r)$.
- (c) Trobeu les equacions de la inversa de f .

2.7 Calculeu els punts fixos i les rectes invariants de l'afinitat f que té per equacions

$$\begin{aligned} x^* &= -3x + 2y + 2 \\ y^* &= -2x + 2y + 1 \end{aligned}$$

Feu el mateix amb l'afinitat f^n per a $n \geq 2$.

2.8 Calculeu, en funció del paràmetre a , les varietats lineals invariants de l'aplicació afí següent:

$$\begin{aligned} x^* &= ax - y - z + 1 \\ y^* &= y + 2z + 1 \\ z^* &= -z \end{aligned}$$

2.9 Sigui $f_a: \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ la família d'afinitats que en una referència fixada té les equacions següents:

$$\begin{aligned}x^* &= ay + 1 - 2a \\ y^* &= -ax + 2ay + 2 - 3a\end{aligned}$$

on a és un paràmetre real no nul.

- (a) Demostreu que existeix un únic punt fix comú a totes les afinitats f_a .
- (b) Demostreu que existeix un únic a per al qual f_a té una recta de punts fixos. Trobeu totes les rectes invariants en aquest cas. És una simetria?
- (c) Sigui h l'homotècia de centre $(1, 2)$ i raó $a \neq 0$. Comproveu que $f_a = f_1 \circ h$.

2.10 Considerem l'afinitat $f_a: \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ donada per les equacions següents en un sistema de referència, on a és un nombre real:

$$\begin{cases} x^* = 7x - (10a + 1)y + (7 - 5a)z + 3 \\ y^* = 2x + (2 - 4a)y + (3 - 2a)z + 1 \\ z^* = -6x + (8a + 5)y + (4a - 4)z - 3. \end{cases}$$

- (a) Trobeu el conjunt de punts fixos de f_a per a cada valor de a .
- (b) Demostreu que, si $a \neq 2$, llavors entre els plans invariants de f_a n'hi ha dos que contenen una recta de punts fixos, i demostreu que la restricció de f_a a un d'aquests plans és una homologia especial i la restricció a l'altre pla és una homologia general.
- (c) Demostreu que existeix una única afinitat $g: \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ tal que

$$\begin{aligned}g(0, 0, 1) &= (0, 0, 1), & g(1, 0, 3) &= (1, 0, 3), \\ g(0, 1, -6) &= (0, 1, -6), & g(3, 1, -2) &= (-3, -1, 4).\end{aligned}$$

- (d) Demostreu que g és una simetria afí respecte a un pla que és invariant per f_a per a qualsevol valor de a , i trobeu la direcció d'aquesta simetria.

2.11 Sigui f l'afinitat de $\mathbb{A}^2$ d'equacions

$$\begin{aligned}x^* &= -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + 2 \\ y^* &= \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}y + 2\end{aligned}$$

- (a) Expresses f com la composició $f = t_u \circ h$ d'una homologia h i una translació t_u paral·lela a l'eix de h .
- (b) Determineu l'eix de h . Busqueu el lloc geomètric dels punts mitjos de p i de $f(p)$ per a $p \in \mathbb{A}^2$.

2.12 Trobeu totes les afinitats del pla que deixen invariant un triangle donat i determineu els punts fixos de cadascuna d'elles. Observeu que és un grup. És commutatiu?

2.13 Descriviu l'afinitat del pla que transforma els vèrtexs d'un triangle en els punts mitjos dels costats oposats.

2.14 Es consideren en el pla afí $\mathbb{A}^2$ tres punts A_1, A_2, A_3 no alineats. Siguin B_1, B_2, B_3 els punts mitjos de A_2A_3, A_1A_3 i A_1A_2 respectivament. Anàlogament, siguin C_1, C_2, C_3 els punts mitjos de B_2B_3, B_1B_3 i B_1B_2 . Descriviu l'afinitat que transforma A_i en C_i , per a cada $i = 1, 2, 3$.

2.15 Donats quatre punts A, B, C, D de $\mathbb{A}^2$, tres d'ells independents, trobeu la condició que han de complir perquè existeixi una afinitat f tal que $f(A) = B, f(B) = C, f(C) = D$ i $f(D) = A$. Determineu els punts fixos i les rectes invariants d'aquesta afinitat.

- 2.16 Siguin F , A , A^* tres punts alineats del pla afí. Considerem totes les afinitats que deixen fix F , transformen A en A^* i tenen una única recta invariant. Trobeu el lloc geomètric de les imatges d'un punt donat per aquestes afinitats.
- 2.17 Siguin ABC un triangle del pla i O un punt que no pertany a cap dels seus costats. Siguin A' , B' , C' els punts mitjos dels segments BC , AC i AB respectivament i siguin A'' , B'' , C'' les imatges de A' , B' , C' per l'homotècia de centre O i raó r . Demostreu que si $r \neq -2$ llavors les rectes AA'' , BB'' , CC'' són concurrents. És cert el mateix si $r = -2$?
- 2.18 Donat un paral·lelogram $ABCD$ en el pla afí, considerem la família d'afinitats f tals que $f(A) = B$, $f(B) = C$ i $f(C)$ és un punt de la recta AD .
- (a) Demostreu que hi ha una única afinitat de la família sense punts fixos.
 - (b) Demostreu que totes les altres afinitats de la família tenen un punt fix i trobeu el lloc geomètric d'aquest punt fix.